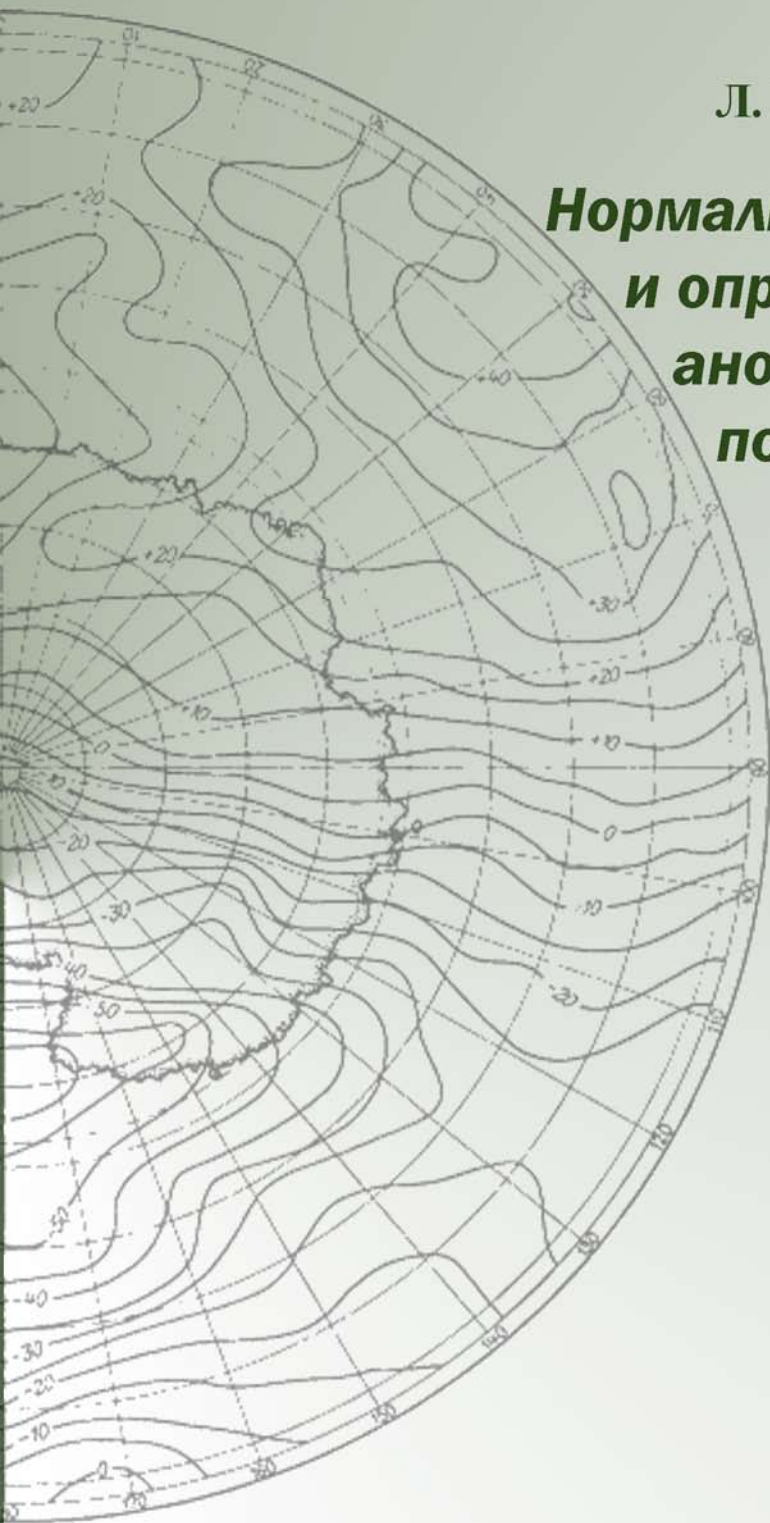


Л. В. Огородова

Нормальное поле и определение аномального потенциала



Л.В. Огородова

НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

*Рекомендовано УМО по образованию в области геодезии и фотограмметрии
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 120100 «Геодезия»
для всех специальностей*

Москва
Издательство МИИГАиК
2010

УДК 528.28
ББК 26.12
О 39

Рецензент

кандидат техн. наук В.И. Крылов
(доцент кафедры астрономии и космической геодезии МИИГАиК)

- О 39 Огородова Л.В.** Нормальное поле и определение аномального потенциала (текст лекций по геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли): Учебное пособие. –М.: Изд-во МИИГАиК, 2010. –105 с.

ISBN 978-5-91188-025-5

Даны основные понятия о поле силы тяжести и его роли в геодезии, изложены принципиальные основы гравиметрического метода определения поверхности и внешнего гравитационного поля Земли. Рассмотрена также роль гравитационного поля в задачах прикладной геодезии.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Геодезия» для всех специальностей.

УДК 528.28
ББК 26.12

ISBN 978-5-91188-025-5

© Огородова Л.В., 2010
© Издательство МИИГАиК, 2010

*«Легкое дело — тяжело писать и говорить,
но легко писать и говорить — тяжелое дело...»*

В.О. Ключевский

Предисловие

Геодезической гравиметрией (Теорией фигуры Земли, физической геодезией) согласно определению Молоденского называют раздел высшей геодезии, задачей которого «является изучение взаимных связей между фигурой Земли и различными элементами земного гравитационного поля, которые можно измерять на ее поверхности».¹

В учебных планах вопросы геодезической гравиметрии изучают в курсах геодезической гравиметрии (специальность прикладная геодезия), теории фигуры планет и гравиметрии (специальность космическая геодезия), теории фигуры Земли (специальность астрономо-геодезия) и высшей геодезии (КФ, ФФ, ФЭУТ). Во всех этих курсах с той или иной степенью подробности рассматривают элементы теории потенциала, гравитационное поле Земли и методы измерения элементов этого поля, теорию определения поверхности и гравитационного поля и вопросы практического применения этой теории. Начальными сведениями о поверхности и гравитационном поле Земли открывают курс геодезии.

В настоящем тексте лекций даны основные понятия о поле силы тяжести и его роли в геодезии и изложены принципиальные основы гравиметрического метода определения поверхности и внешнего гравитационного поля Земли. Рассмотрена также роль гравитационного поля в задачах прикладной геодезии.

Более подробно с полем силы тяжести Земли и методами его измерений можно ознакомиться по учебникам [3, 6] и монографии [5]. Текст лекций по этим разделам, отражающий современное состояние методов и результатов измерений гравитационного поля, готовится к печати.

¹ М.С. Молоденский. Избранные труды. —М.: Наука, 2001. —570 с.

*«Геодезия — наука об измерении
и изображении земной поверхности»*

Фридрих Вильгельм Гельмерт. Математические
и физические теории высшей геодезии, т.1, 1884 г.

ВВЕДЕНИЕ

Общие сведения о геодезии. Место геодезической гравиметрии среди геодезических дисциплин

Геодезия — наука, объектом изучения которой являются поверхность и внешнее гравитационное поле Земли. Термин «геодезия» образован из греческих слов «*ge*» (geo) — земля и «*daiomai (dasomai)*» — разделяю и означает «землеразделение». Геодезия возникла в глубокой древности из потребностей землепользования и землевладения.

Современная геодезия — обширная отрасль естествознания, включающая в себя несколько направлений, основанных на разных видах измерений и разных методах исследования. В связи с этим геодезию подразделяют на несколько достаточно самостоятельных дисциплин. Отметим основные из них:

геодезия в узком смысле рассматривает методы и технику измерений на местности в локальном районе для построения планов и карт. Совокупность этих работ называют *топографической съемкой* или *топографией*;

высшая геодезия занимается определением поверхности всей Земли в целом посредством определения координат опорных точек этой поверхности и элементов гравитационного поля в единой координатной системе, на основе измерений, выполняемых на поверхности Земли;

физическая геодезия или *геодезическая гравиметрия* решает задачу определения поверхности и поля Земли на основании использования преимущественно измерений элементов гравитационного поля на ее поверхности;

космическая геодезия — раздел геодезии, в котором для определения поверхности и поля используют результаты наблюдения искусственных и естественных небесных тел;

морская геодезия — научная дисциплина, в задачи которой входит создание опорной сети на поверхности или дне океана для обеспечения

геофизических съемок прибрежной части океана и его морей (съемка континентального шельфа) и исследований океанического дна.

прикладная или инженерная геодезия — раздел геодезии, в котором рассматривают методы и средства геодезических измерений, выполняемых для обеспечения строительства и эксплуатации различных сооружений.

Отдельные разделы геодезии не являются обособленными и тесно связаны между собой. Так, результаты, получаемые средствами космической геодезии, используют во всех остальных разделах, а создаваемая высшей геодезией сеть опорных пунктов служит основой для топографии и инженерной геодезии. В свою очередь высшая геодезия рассматривает вопросы совместного использования результатов, полученных методами космической и физической геодезии, для наиболее точного определения поверхности и поля Земли. Морская геодезия использует методы и результаты высшей и космической геодезии.

Являясь одной из отраслей естествознания, геодезия взаимодействует с другими науками о Земле. Для решения своих задач геодезия привлекает измерения астрономических координат. Отсюда ее тесная связь с *геодезической астрономией*. Выбор проекции для построения карт и планов и создание изображений поверхности Земли невозможен без использования методов *математической картографии*. Поверхность Земли определяют или непрерывно и изображают в виде карт и планов или задают дискретно, определяя координаты опорных точек в единой системе. Изображение поверхности Земли получают также с помощью снимков с самолетов или из космоса. Обработкой аэро- и космических снимков занимается *фотограмметрия*. Космическая геодезия опирается на теорию движения искусственных спутников отсюда ее связь с *небесной механикой*. Изучением океана и, в частности, определением его поверхности занимается *океанография*. Поверхность Земли в силу различных причин с течением времени изменяется. Изучение этих из-



Основные разделы геодезии

менений является задачей *геодинамики*, составлявшей до недавнего времени один из разделов высшей геодезии.

Геодезия изучает поверхность Земли с помощью измерений расстояний и углов между точками этой поверхности. Измерения выполняют посредством геодезических инструментов, ориентируемых по направлению *отвесной линии*. Отвесной линией называют линию действия *силы тяжести*, т.е. равнодействующей силы притяжения всеми массами Земли и центробежной силы, вызванной вращением Земли вокруг полярной оси. Поверхность жидкости в спокойном состоянии всегда перпендикулярна к направлению силы тяжести, а отвес расположен по направлению линии действия этой силы. Плоскость, перпендикулярную к отвесной линии, называют *горизонтальной плоскостью*, а плоскости, проходящие через отвесную линию — *вертикальными плоскостями или плоскостями вертикала*.

Если переместиться вдоль отвесной линии или по горизонтальной плоскости на некоторое расстояние, то направление силы тяжести изменится и в этих новых точках направление отвесной линии и положение горизонтальной плоскости будет иным по сравнению с первоначальным. Если же перемещаться так, чтобы смещение происходило всегда перпендикулярно к направлению силы тяжести, то будет образована поверхность, которую называют *уровенной поверхностью*. Так как сила направлена по нормали к уровенной поверхности, то при перемещении по этой поверхности работа равна нулю. С уровенной поверхностью совпадает свободная поверхность жидкости, на которую воздействует только сила тяжести. Линия, проходящая перпендикулярно к уровенным поверхностям, называется *силовой линией*. В каждой точке силовой линии касательная к ней совпадает с направлением силы тяжести (направлением отвеса) и является отвесной линией.

Изучение как физической поверхности Земли, так и уровенных поверхностей входит в задачи геодезической гравиметрии. При этом физическую поверхность Земли всегда определяют относительно той или иной уровенной поверхности.

Сила тяжести изменяется по величине и направлению при перемещении в пространстве. Например, сила тяжести на вершине останкинской телебашни (высота ее 530 м) меньше значения у подножия на $1/6000$ от полной величины, а угол между ее направлениями в тех же точках составляет несколько десятых долей секунды дуги. Из-за изменения направления силы тяжести два человека, стоящие на земле на расстоянии 30 м друг от друга, взаимно наклонены на угол около $1''$.

Вследствие изменения силы тяжести уровенные поверхности

земного поля силы тяжести не параллельны и имеют сложную форму (рис.1, а). Поле силы, непостоянной по величине и направлению называют *неоднородным*.

В неоднородном поле сила тяжести не постоянна ($g_q \neq g_p, g_q \neq g_Q$), поэтому расстояния Pp и qQ между двумя уровенными поверхностями в разных точках P и Q этих поверхностей неодинаково ($Pp \neq qQ$) и расстояния Pq и pQ между проекциями точек на разные поверхности неравны ($Pq \neq pQ$). Так, проекция pQ отрезка PQ , равного 1 км, на уровенную поверхность точки Q , проходящую на 530 м выше уровенной поверхности точки P , на 80 мм или на $8 \cdot 10^{-5}$ больше его проекции Pq на уровенную поверхность точки P . Разность расстояний между уровенными поверхностями, проходящими через точки P и Q , составит 0,4 мм или $8 \cdot 10^{-7}$.

Измерения в геодезии (топографии) выполняют обычно с точностью ниже 10^{-5} , поэтому неоднородностью гравитационного поля пренебрегают и считают силу тяжести во всех точках съемки постоянной по величине и направлению ($g_q = g_p = g_Q$); в этом случае говорят, что поле *однородно* (рис. 1, б).

В однородном поле все уровенные поверхности являются горизонтальными плоскостями, а отвесные линии — параллельными прямыми. В таком поле расстояние между двумя уровенными поверхностями постоянно, а проекции одного и того же отрезка на все уровенные поверхности равны ($Pq = pQ, Pp = qQ$). Силовые линии и уровенные поверхности используют поэтому в геодезии в качестве материализованной прямоугольной системы координат. Поле Земли считают однородным в геодезии (топографии) и прикладной геодезии.

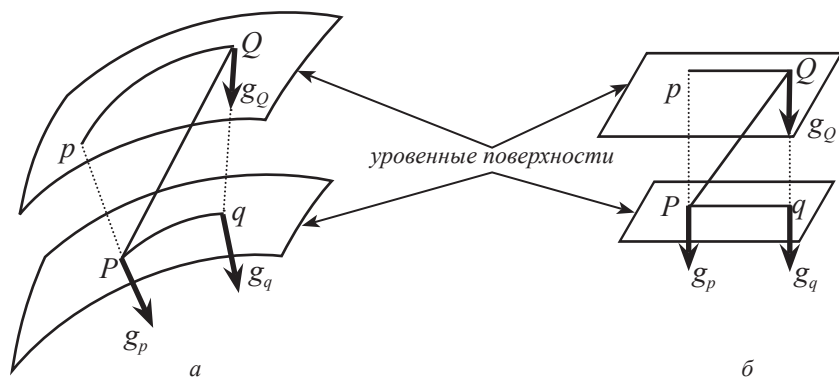


Рис. 1. Уровенные поверхности неоднородного (а) и однородного (б) полей

Геодезия (топография) — раздел геодезии, где рассматривают методы и средства измерения расстояний и углов между точками поверхности Земли и обработку результатов этих измерений в **однородном гравитационном поле** с целью построения профилей, топографических планов, карт и создания цифровых моделей местности.

Высшая, космическая и физическая геодезии всегда решают задачи в неоднородном поле реальной Земли.

Основные понятия, используемые в геодезической гравиметрии

Физическая поверхность Земли — поверхность суши и морская топографическая поверхность² — является на первый взгляд достаточно сложной поверхностью. Однако если учесть, что горы занимают незначительную часть общей площади Земли, а около 70% ее поверхности покрыты океаном, можно рассматривать обобщенную поверхность Земли как уровненную поверхность, близкую к поверхности Мирового океана. Установлено, что эта уровенная поверхность хорошо аппроксимируется поверхностью сжатого эллипсоида вращения с параметрами: большая полуось $a = 6\,378\,137$ м; полярное сжатие $\alpha = 1:298,257$.

Напомним, что сжатым эллипсоидом вращения называют поверхность, образованную вращением эллипса вокруг его малой оси (рис.2), а полярное сжатие — это отношение разности $a - b$ полуосей эллипсоида к большой полуоси a .

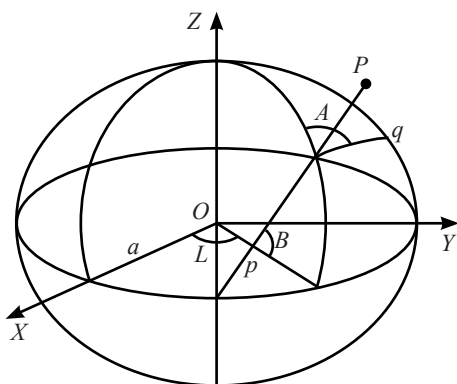


Рис. 2. Геодезические координаты

Положение точки P поверхности Земли относительно эллипсоида определяют *геодезическими координатами*. На рис. 2 Pp — нормаль к поверхности эллипсоида, проходящая через точку P . Угол B между нормалью к эллипсоиду и плоскостью XOY экватора называют *геодезической широтой*. Все точки с одинаковой широтой лежат в одной плоскости, параллельной плоскости экватора. Эта плоскость называется *плоскостью*

² Морская топографическая поверхность — это сглаженная поверхность Мирового океана, освобожденная от волновых колебаний.

параллели, а линия ее пересечения с эллипсоидом — *параллелью*. Для эллипсоида вращения все параллели являются окружностями. Угол между нормалью к эллипсоиду и плоскостью параллели также равен геодезической широте.

Плоскость, проходящая через малую ось эллипсоида, называется *плоскостью геодезического меридиана*. Линия пересечения плоскости меридиана с поверхностью эллипсоида называется *меридианным сечением* или *меридианом*. Для эллипсоида вращения все меридианы являются эллипсами с полуосями a и b . Для задания второй координаты выбирают произвольно плоскость ZOX *начального или нулевого меридиана*. Угол L между плоскостью начального меридиана и меридиана POp точки P называется *геодезической долготой*³.

Третья координата в геодезической системе — это геодезическая высота. *Геодезической высотой* называют отрезок нормали от эллипсоида до точки P .

Положение точек на поверхности эллипсоида можно определять не только геодезическими координатами B, L . Часто используют полярную систему координат с началом в какой-либо точке P эллипсоида, а положение любой другой точки q определяют ее расстоянием от начальной точки и геодезическим азимутом. *Геодезическим азимутом A* называют двугранный угол между плоскостью геодезического меридиана точки P и вертикальной плоскостью, проходящей через нормаль к эллипсоиду в точке P и произвольную точку q эллипсоида.

Геодезические координаты невозможно измерить непосредственно, поскольку эллипсоид и нормали к его поверхности в реальности не существуют. В результате измерений можно определить положение точек относительно оси вращения Земли в астрономической системе координат. P

На рис. 3 O — центр масс, OZ — ось вращения Земли, OXY — плоскость экватора, перпендикулярная к оси вращения. Вектор $\mathbf{g}_p$ силы тяжести определяет направление отвесной линии в точке P . Проведем линию PP_1 , параллельную оси вращения Земли. Плоскость, проходящая через отвесную линию и линию, параллельную оси вращения Земли, называется плоскостью *астрономического меридиана*. Эта плоскость пересекает экватор по линии P_1P_2 . Так как отвесная линия и ось вращения Земли в общем случае не лежат в одной плоскости и являются скрещивающимися прямыми, плоскость астрономического меридиана

³ Термины широта и долгота дошли до нас от древних мореходов, описывающих Средиземное море. Та координата, которая соответствовала длине Средиземного моря, стала долготой, а та, которая соответствовала его ширине, — широтой.

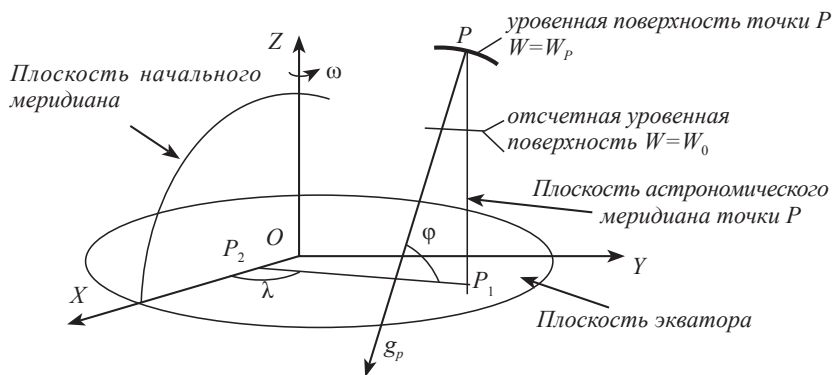


Рис. 3. Астрономические координаты

не проходит через центр масс и ось вращения Земли.

Астрономической широтой φ называют угол между отвесной линией и плоскостью экватора. *Астрономическая долгота* λ — угол между плоскостью астрономического меридиана точки P и плоскостью начального астрономического меридиана.

Астрономическим азимутом называют двугранный угол между плоскостью астрономического меридиана и плоскостью вертикала, проходящего через произвольную точку.

Положим, что центр эллипсоида совмещен с центром масс Земли, а плоскости начального геодезического и астрономического меридианов совпадают. Тогда геодезические и астрономические координаты будут различаться из-за несовпадения нормали к эллипсоиду и отвесной линии. Угол между нормалью к эллипсоиду и отвесной линией называется *уклоном отвеса*. На поверхности Земли отклонения отвеса невелики и составляют, как правило, несколько секунд дуги. Максимальное отклонение отвеса не превышает $1'$. Поэтому, если точность определения координат невысока, астрономические и геодезические координаты не различают и называют *географическими координатами*.

Определим третью координату. В геодезической системе координат высота отсчитывалась от эллипсоида и определялась чисто геометрически. В реальном поле Земли высоты отсчитывают от уровенной поверхности. В этом случае высота становится физическим понятием и определяется работой, которая выполняется в поле силы тяжести.

Рассмотрим уровенные поверхности, проходящие через две близкие точки поверхности Земли (рис.4). Пусть расстояние между этими точками равно dl . Сила тяжести направлена по нормали к этим поверхностям и при перемещении вдоль них работа равна нулю. Обозначим

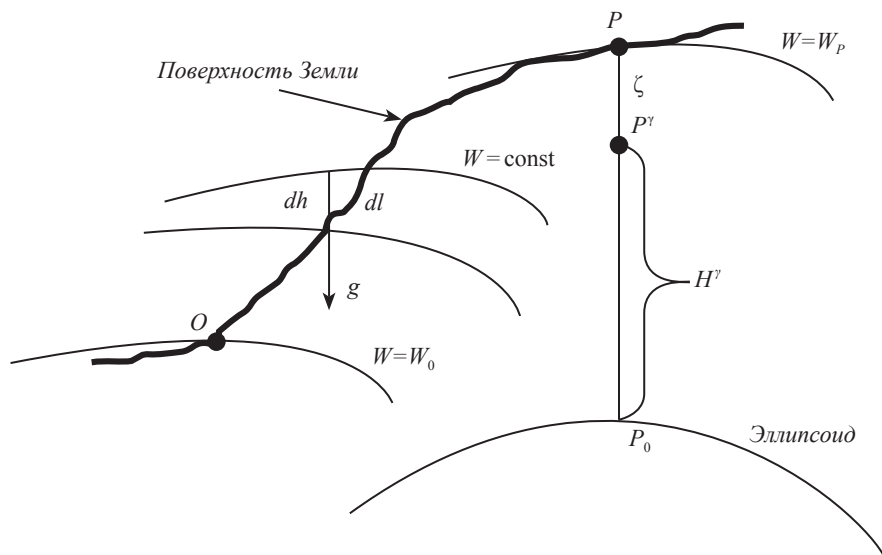


Рис. 4. К определению высоты в поле силы тяжести

через dW работу, которую нужно выполнить для перехода с одной уровневой поверхности на другую. Известно, что работа равна произведению перемещения dl на проекцию $g \cos(g^{\wedge} dl)$ силы тяжести g на направление перемещения

$$dW = g \cos(g^{\wedge} dl) dl. \quad (1)$$

Но согласно рис.4 произведение $\cos(g^{\wedge} dl) dl$ является проекцией отрезка dl на направление силы тяжести, т.е. равно расстоянию dh между уровнями поверхностями.

Расстояние между близкими уровнями поверхностями называют *превышением*. Превышение положительно, если оно направлено противоположно силе тяжести, т.е. уровневая поверхность, проходящая через конечную точку отрезка dl , лежит выше уровневой поверхности, проходящей через его начальную точку. Поэтому

$$dh = -\cos(g^{\wedge} dl) dl, \quad (2)$$

$$dW = -g dh. \quad (3)$$

Найдем работу, совершаемую силой тяжести при перемещении по уровневой поверхности. В этом случае в равенстве (1) $\cos(g^{\wedge} dl) = 0$, поэтому $dW = 0$, следовательно

$$W = \text{const}. \quad (4)$$

Функцию W называют *потенциалом силы тяжести*, а (4) является уравнением уровенной поверхности. Так как потенциал на уровенной поверхности постоянен, эту поверхность называют также *экипотенциальной*.

Суммируя элементарные разности (3) от некоторой начальной точки O до точки P поверхности Земли, получим

$$W_0 - W = \int_{OP} g dh. \quad (5)$$

Точку O выбирают обычно на уровне моря. В этом случае разность $W_0 - W$ называют *геопотенциальной величиной* или *геопотенциальным числом*. Геопотенциальное число — это та работа, которую нужно совершить, чтобы подняться от уровня моря до точки P поверхности Земли. Так как и силу тяжести g , и превышение dh можно измерить на поверхности Земли, геопотенциальное число считают измеряемой величиной и рассматривают как третью координату. Система координат $\varphi, \lambda, W_0 - W$ называется *натуральной* или *естественной*.

Для перевода геопотенциального числа в линейную меру поступают следующим образом. Через точку P (см. рис.4) проводят нормаль P_0P к эллипсоиду и находят на этой нормали такую точку P' , для которой работа по перемещению от точки P_0 эллипсоида тождественно равна геопотенциальному числу. Высота этой точки P' над эллипсоидом называется *нормальной высотой* точки P поверхности Земли. Нормальные высоты были введены в геодезию М.С. Молоденским (1909–1991).

Согласно рис.4, чтобы перейти от нормальной высоты P_0P' к геодезической P_0P нужно добавить к нормальной высоте отрезок $P'P = \zeta$, который называют *аномалией высоты*. Таким образом

$$H = H' + \zeta. \quad (6)$$

Это простое соотношение играет ныне важную роль в геодезии.

Нормальная высота определяется разностью потенциалов точек поверхности Земли и не зависит от положения внутри нее отсчетного эллипсоида. Если эллипсоид займет иное положение, точки P_0 и P' переместятся вместе с ним, а величина отрезка P_0P' не изменится. Иначе обстоит дело с геодезической высотой и аномалией высоты. Так как положение точки P поверхности Земли неизменно, то при перемещении точек P_0 и P' и геодезическая высота и аномалия высоты изменятся. Поэтому геодезическая высота и аномалия высоты зависят от выбора эллипсоида, и одна и та же точка поверхности Земли может иметь несколько значений геодезической высоты и аномалии высоты. Нормальная высота определяется измерениями на поверхности Земли и имеет

для данной точки единственное значение при неизменном положении точки *O* начала отсчета геопотенциального числа.

В геодезии (топографии) нормальную высоту называют *абсолютной*, а разность нормальных высот — *относительной* высотой. Численное значение абсолютной высоты принято называть *отметкой*.

Краткая справка об истории развития геодезии

Началом геодезии как науки, определяющей форму и размер Земли, является предположение о том, что Земля имеет форму шара. Принято считать, что впервые мысль о шарообразности Земли высказал древнегреческий философ и математик Пифагор (ок.571–497гг. до н.э.). С этого момента проявился интерес к измерению размеров Земли, т.е. радиуса земного шара.

С течением времени представление о форме Земли изменялось, изменялись и задачи геодезии, и в этих изменениях выделяются четыре периода.

1. От Пифагора до Ньютона. В этот период господствовало представление о шарообразной Земле, и задача Геодезии заключалась в измерении ее радиуса. Первое исторически достоверное измерение радиуса Земли выполнено в III в. до н.э. греческим ученым Эратосфеном Киренским (ок. 276–194 гг. до н.э.). Завершился этот период измерениями французского астронома Жана Пикара (1620–1682), выполненными в 1669–1670 гг. с высокой для своего времени точностью.

2. Второй период открывается работами Исаака Ньютона (1643–1727). В 1687 г. вышла книга И.Ньютона «Математические начала натуральной философии», совершившая подлинный переворот в науке. В ней Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения и на основании этого высказал гипотезу об эллипсоидальной форме поверхности Земли. Причем для обоснования закона всемирного тяготения Ньютон использовал измерение радиуса Земли, выполненное Пикаром.

Со времен Ньютона задачей геодезии становится определение двух параметров, характеризующих эллипсоид — большой полуоси и сжатия. Первое определение сжатия земного эллипсоида принадлежит Ньютону. Основываясь на законе всемирного тяготения и считая Землю однородной по плотности, Ньютон нашел для сжатия значение 1:230.

Взгляды Ньютона не сразу получили всеобщее признание. Измерения, выполненные французскими астрономами Кассини, показали, что Земля вытянута вдоль полярной оси. Это вызвало известный в истории Геодезии спор о форме Земли, разрешенный знаменитыми экспедициями Парижской академии наук, экспериментально подтвердившими теоре-

тические выводы Ньютона.

В 1792–1797 гг. во Франции под руководством Ж. Деламбра (1749–1822) выполнено определение размеров земного эллипсоида с целью установления новой единицы длины — метра. Эллипсоид Деламбра имеет параметры:

большая полуось $a = 6\,375\,653$ м;

сжатие $\alpha = 1:334$.

В качестве метра была принята одна десятимиллионная часть четверти меридиана эллипсоида Деламбра.

3. К концу XVIII — началу XIX вв. выявились расхождения параметров эллипсоида, определенных по измерениям в разных частях Земли, значительно превышающие ошибки измерений. Это дало основание предположить, что поверхность Земли, под которой понимали уровенную поверхность, не является эллипсоидом вращения. Мысль об отличии уровенной поверхности от эллипсоидальной была высказана одновременно несколькими учеными. Так появилось понятие о *геоиде*.

Первоначально геоидом называли невозмущенную поверхность океана и ее воображаемое продолжение внутри Земли на континентах. Такой геоид называют *геоидом Гаусса–Бесселя*. Понятие геоида по Гауссу–Бесселю является образным, наглядным, но оно не определено с научной точки зрения. Невозмущенная поверхность океана является абстракцией; тем более неясно, как ее продолжить под материками. Позднее немецким математиком и астрономом Г. Брунсом (1848–1919) было введено строгое определение геоида:

Геоид — уровенная поверхность потенциала силы тяжести, проходящая через начало счета высот.

С введением понятия геоида начался третий период, в котором задача Геодезии заключалась в определении поверхности геоида и наиболее близкого к нему эллипсоида. Этот период длился свыше ста лет и завершился в середине XX в.

4. Современный период геодезии открывается работами М.С. Молоденского.

В 1945 г. в монографии «Основные вопросы геодезической гравиметрии» Молоденский сформулировал задачу геодезии как задачу определения поверхности и внешнего гравитационного поля Земли и дал решение этой задачи. Молоденский доказал принципиальную невозможность определения поверхности геоида по измерениям, выполняемым на поверхности Земли, так как чтобы определить геоид, нужно знать плотность земного вещества в каждой точке между геоидом и

физической поверхностью. Введение геоида является излишним и поверхность Земли проще определяется без его использования. В теории Молоденского рассматриваются только поверхность эллипсоида, физическая поверхность Земли и поверхность, образованная откладыванием от эллипсоида нормальных высот, т.е. множеством точек P' (см. рис. 4). Эту последнюю поверхность называют *гипсометрической поверхностью* или *теллуroidом*⁴. В новой теории геодезии известной поверхностью является поверхность теллуroidа, а относительно нее определяется поверхность Земли. Т.е. теллуroid играет ту же роль, что и эллипсоид в теории определения геоида, а физическая поверхность Земли — роль геоида. Если бы нормальные высоты были равны нулю, то теллуroid совпал бы с эллипсоидом, физическая поверхность — с геоидом.

Задача Молоденского не требует знания плотности внутри Земли и строго решается по измерениям на поверхности и вне Земли. Эта задача полнее задачи определения геоида, так как здесь ищется не одна единственная уровенная поверхность (геоид), а вся совокупность уровенных поверхностей внешнего земного гравитационного поля.

Поверхность теллуroidа определяется измеренными геопотенциальными числами точек поверхности Земли, т.е. разностью $W_0 - W$ потенциалов. Для однозначного решения задачи определения поверхности Земли нужно определить постоянную W_0 в исходном пункте счета геопотенциальных чисел, или, что то же самое, определить значение потенциала на уровенной поверхности $W = W_0$. Эта постоянная определяет размер отсчетного эллипсоида. Таким образом, в теории Молоденского знание поверхности геоида не требуется. Необходимо определить только значение потенциала на его поверхности. В связи с этим в современной Геодезии принято такое определение геоида:

Геоид — уровенная поверхность потенциала силы тяжести, проходящая через начало счета геопотенциальных чисел.

Таковые основные вехи в истории развития Геодезии и эволюции понятия и роли геоида.

В топографии поверхность Земли (уровенная поверхность) считается плоскостью, поэтому задача определения размеров и формы Земли не возникает. История развития геодезии (топографии) — это история совершенствования методов геодезических измерений. Если на заре геодезии линии измеряли мерными веревками и цепями, углы — с помощью астролябии, превышения — водными нивелирами, то ныне для этих измерений применяют быстродействующие электронные автоматизированные приборы.

⁴ От греч. *hypsos* — высота, от лат. *tellus (telluris)* — Земля.

Основные системы координат, используемые в России

Эллипсоид, относительно которого определяют положение точек поверхности Земли, может занимать внутри Земли разное положение. Если центр этого эллипсоида совпадает с центром масс Земли, а его малая ось с ее осью вращения, то такой эллипсоид называют *общим земным эллипсоидом*. Размер этого эллипсоида стараются выбрать так, чтобы аномалии высоты в системе этого эллипсоида были минимальны на всей поверхности Земли.

Если центр эллипсоида не совмещен с центром масс и его малая ось параллельная оси вращения, а размеры подобраны так, чтобы аномалии высоты были минимальны в пределах ограниченной территории, то такой эллипсоид называют *референц-эллипсоидом*.

Общий земной эллипсоид используют для определения положения точек на всей поверхности Земли. Референц-эллипсоид служит для тех же целей на территории отдельных государств или регионов.

В России в качестве референц-эллипсоида принят *эллипсоид Красовского*. Его параметры получены в 1940г. А.А.Изотовым (1907–1988) под руководством Ф.Н.Красовского(1848–1948) и имеют значения:

большая полуось $a = 6\,378\,245$ м, $\alpha = 1:298,3$.

Чтобы установить систему координат, эллипсоид необходимо определенным образом закрепить, расположить внутри Земли. Этот процесс называют *ориентированием эллипсоида*. Для ориентирования эллипсоида нужно задать геодезические координаты хотя бы одного пункта поверхности Земли. Их можно положить равными астрономическим координатам. В этом случае положение эллипсоида зависит от отклонений отвеса в выбранном для ориентирования пункте. Более надежное ориентирование достигается при использовании астрономических координат нескольких пунктов. Первое ориентирование эллипсоида Красовского выполнено в 1942 г. по астрономическим координатам более чем 300 пунктов, расположенных преимущественно в Европейской части СССР. Установленная таким образом система координат была закреплена постановлением Совета Министров 7 апреля 1946 г. и получила название *Система координат 1942 г. (СК-42)*.

Постановлением 1946 г. была также введена единая система высот на территории страны. За исходный уровень счета высот был принят уровень Балтийского моря (Кронштадтский футшток). Позднее после уравнивания нивелирной сети была введена Балтийская система высот 1977 г. Эта система устанавливает начало счета нормальных высот и геопотенциальных чисел от нуля Кронштадтского футштока.

В 1995 г. после завершения построения и уравнивания Государ-

ственной геодезической сети (ГГС) получена новая система координат, в которой отчетным референц-эллипсоидом также является эллипсоид Красовского. Ориентировка эллипсоида выполнена по спутниковым наблюдениям, а система координат задана геодезическими координатами 164 тысяч пунктов ГГС, достаточно равномерно покрывающих всю территорию СССР. Эту систему называют *Система координат 1995 г. (СК-95)*.

Исходным пунктом систем 1942 и 1995 гг. является Пулково.

Началом счета геодезических высот также является Пулково, в котором геодезическая высота принята равной нормальной, а аномалия высоты равной нулю. Эллипсоид Красовского с принятой ориентировкой хорошо представляет уровенную поверхность на территории России. На большей части этой территории аномалии высоты не превышают 10 м, и лишь на дальнем востоке увеличиваются до 50 м, а на Чукотке уменьшается до 30 м.

Положение эллипсоида Красовского в системах координат 1942 и 1995 гг. отличается незначительно, центр одного эллипсоида смещен относительно центра другого на 4 м, а углы между осями координат не превышают 0,1". Однако расхождения координат пунктов в этих системах возрастают с удалением от исходного пункта Пулково и могут быть значительны на окраинах сети в восточных районах страны. Это вызвано ошибками координат системы СК-42.

К 1990г. методами космической геодезии в результате наблюдений специальных ИСЗ была создана общеземная система координат, получившая название ПЗ-90 — Параметры Земли 1990г. Общий земной эллипсоид системы ПЗ-90 имеет параметры:

большая полуось $a = 6\,378\,136$ м, $\alpha = 1:298,257$.

Системы координат СК-95 и ПЗ-90 закреплены постановлением Правительства.

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПОСТАНОВЛЕНИЕ

от 28 июля 2000 г. № 568 г. Москва

Об установлении единых государственных систем координат

В соответствии с Федеральным законом «О геодезии и картографии» Правительство Российской Федерации постановляет.

1. Установить следующие единые государственные системы координат:

а) система геодезических координат 1995 года (СК–95) — для использования при осуществлении геодезических и картографических работ начиная с 1 июля 2002 г.;

б) геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ–90) — для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

2. Федеральной службе геодезии и картографии России осуществить организационно-технические мероприятия, необходимые для перехода к использованию системы геодезических координат 1995 года (СК–95).

До завершения этих мероприятий используется единая система геодезических координат, введенная постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. № 760.

3. Министерству обороны Российской Федерации обеспечить в установленном порядке федеральные органы исполнительной власти по их запросам сведениями, необходимыми для использования геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ–90), и осуществлять контроль за состоянием и развитием пунктов космической геодезической сети этой системы координат.

ГЛАВА 1. НОРМАЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

1.1. Понятие о нормальном поле и способах его выбора

При изучении гравитационного поля Земли обычно используют вспомогательное поле силы тяжести или силы притяжения, уровенные поверхности которых близки к уровенным поверхностям реального земного поля, но имеют более простую по сравнению с ними форму. Такое поле и описывающие его потенциал U силы тяжести или потенциал V_n притяжения называют *нормальными*. После введения нормального потенциала действительный потенциал W силы тяжести представляют в виде

$$W = U + T,$$

где T — *аномальный* или *возмущающий потенциал*.

Введение нормального потенциала преследует две цели: в одном случае нормальное поле рассматривают как модель, приближенно представляющую реальное поле Земли, а потенциалом T просто пренебрегают; во втором нормальное поле используют как отсчетное, относительно которого находят аномальный потенциал. Т.е. в первом случае речь идет об использовании нормального поля вместо реального, а во втором — об определении отличия реального поля от нормального. В обоих случаях стараются выбирать нормальное поле так, чтобы аномальный потенциал

$$T = W - U$$

был мал. Тогда в первом случае модельное нормальное поле будет близко к действительному, а во втором появляется возможность строить теорию определения аномального потенциала в линейном приближении, не учитывая члены порядка квадрата аномального потенциала.

В качестве нормального всегда стараются выбрать потенциал, который можно описать по возможности простыми аналитическими выражениями, с тем, чтобы в нормальном поле легко решались задачи геодезии, геофизики, небесной механики.

Таким образом, нормальный потенциал можно определить как *потенциал достаточно простого вида, по возможности близкий к действительному*.

Существует несколько способов задания нормального потенциала. В одних используют понятие *нормальной Земли* — модели Земли, обладающей теми или иными свойствами. Так, в геофизике задают поверхность и модель внутреннего строения нормальной Земли. Подобная модель впервые была введена А. Клеро (1713–1765), который полагал, что Земля состоит из однородных жидких слоев и находится в состоянии гидростатического равновесия.

В топографии и инженерно-геодезических работах не очень высокой точности поле силы тяжести полагают однородным — все уровенные поверхности считают параллельными плоскостями, а силовые линии — параллельными прямыми. Это означает, что потенциал силы тяжести является линейной функцией $U=U_0-\gamma h$ высоты h над исходной уровенной плоскостью $U=U_0$, а нормальная сила тяжести $\gamma = -\frac{\partial U}{\partial h}$ постоянна по величине и направлению.

Еще один способ введения нормального поля основан на разложении потенциала притяжения в ряд шаровых функций, которое в сферических координатах r, Φ, L имеет вид

$$V(r, \Phi, L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^n (A_n^k \cos kL + B_n^k \sin kL) P_n^k(\Phi), \quad (1.1)$$

где r — радиус-вектор; Φ — геоцентрическая широта; L — долгота; $P_n^k(\Phi)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода степени n и порядка k . Нормальный потенциал получают, оставляя конечное число членов этого ряда. Так, оставляя только член нулевого порядка, т.е. полагая в (1.1) $n=k=0$, получают

$$V_H = \frac{GM}{r}, \quad (1.2)$$

причем $A_0^0 = GM$.

Это означает, что за нормальную Землю принят невращающийся шар с центрально-симметричным распределением плотности. Произведение GM постоянной тяготения G на массу M Земли называют *геоцентрической гравитационной постоянной*.

Обычно в ряде (1.1) оставляют только не зависящие от долготы и четные относительно широты члены, т.е. члены четных степеней n и нулевого порядка k . Тогда нормальный потенциал притяжения получит вид

$$V_H = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^{2n+1}} A_{2n}^0 P_{2n}(\sin \Phi) \quad (1.3)$$

и будет симметричен относительно оси Z вращения Земли и плоскости

экватора. При $n=0$ коэффициент A_{2n}^0 этого ряда совпадает с (1.2) и является геоцентрической гравитационной постоянной. При $n=1$

$$A_2^0 = G(A_m - C),$$

где A_m — средний экваториальный; C — полярный моменты инерции Земли соответственно.

Для получения нормального потенциала силы тяжести к (1.3) добавляют потенциал Q центробежной силы

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\omega^2}{2}r^2 \cos^2 \Phi \quad (1.4)$$

и находят $U = V_n + Q$ или

$$U = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^{2n+1}} A_{2n}^0 P_{2n}(\sin \Phi) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \Phi. \quad (1.5)$$

В геодезии обычно используют нормальную Землю в виде идеальной планеты, имеющей форму эллипсоида вращения

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a_0^2} + \frac{z_0^2}{b_0^2} = 1, \quad (1.6)$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки поверхности эллипсоида; a_0, b_0 — большая и малая полуоси соответственно.

Эта поверхность является уровенной поверхностью нормального потенциала силы тяжести, т.е. на поверхности эллипсоида (1.6) выполняется условие

$$U = U_0, \quad (1.7)$$

где U_0 — постоянная.

Такой эллипсоид называют *уровенным*. Использование поля силы тяжести уровенного эллипсоида в качестве нормального поля удобно в геодезии потому, что в этом случае одна и та же поверхность — эллипсоид — является отсчетной при решении и геометрических и физических задач.

Особенно удобно объединение двух последних подходов к выбору нормального поля, когда потенциал уровенного эллипсоида представляют в виде ряда шаровых функций, а коэффициенты разложения (1.3) подбирают так, чтобы одна из уровенных поверхностей потенциала (1.5) силы тяжести была эллипсоидом вращения. Это позволяет построить непротиворечивую модель нормального поля, объединяющую геометрический и физический подходы к изучению Земли.

1.2. Внешний потенциал притяжения уровенного эллипсоида

Зададим массу M уровенного эллипсоида (1.6) и угловую скорость ω его вращения. В теории потенциала доказано, что этих данных достаточно для определения внешнего гравитационного поля эллипсоида.

Потенциал эллипсоида удобно определять в специальной системе координат b, u , где b — малая полуось эллипсоида, софокусного эллипсоиду (1.6), u — приведенная широта (рис. 1.1). В этой системе координат для потенциала притяжения уровенного эллипсоида получают замкнутое выражение

$$V^3 = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{b} + \frac{\omega^2 a_0^2}{3} \frac{q}{q_0} \left(\frac{3}{2} \sin^2 u - \frac{1}{2} \right). \quad (1.8)$$

Здесь $a_0^2 = b_0^2 + E^2$; E — линейный эксцентриситет, равный отрезку OF на рис. 1.1; F — фокус эллипсоидов; функция q определена выражением

$$q = \left[\left(3 \frac{b^2}{E^2} + 1 \right) \operatorname{arctg} \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right] \quad (1.9)$$

или

$$q = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{E}{b} \right)^{2n+1}, \quad (1.10)$$

q_0 — функция q при $b = b_0$.

На поверхности эллипсоида при $q = q_0$ из (1.8) находим

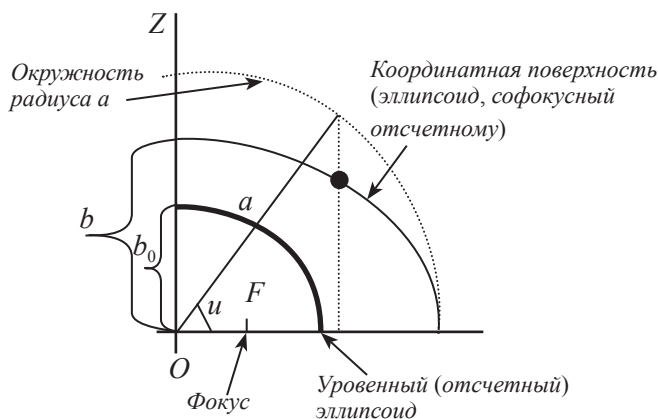


Рис. 1.1. Система координат сжатого эллипсоида

$$V_0 = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{b_0} + \frac{\omega^2 a_0^2}{3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 u - \frac{1}{2} \right). \quad (1.11)$$

Согласно условию (1.7), на поверхности эллипсоида потенциал силы тяжести постоянен. Но центробежный потенциал

$$Q_0 = \frac{\omega^2}{2} (x_0^2 + y_0^2) \quad (1.12)$$

на поверхности эллипсоида изменяется в зависимости от расстояния $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ до оси вращения, т.е. от радиуса параллели. Поэтому потенциал V_0 притяжения на уровненном эллипсоиде не постоянен и изменяется при изменении широты:

$$V_0 = U_0 - Q_0 = U_0 - \frac{\omega^2}{2} (x_0^2 + y_0^2). \quad (1.13)$$

Этим объясняется тот парадоксальный факт, что, согласно (1.8) и (1.11) *потенциал притяжения зависит от угловой скорости вращения эллипсоида*. На поверхности эллипсоида (1.6) потенциал U_0 силы тяжести должен быть постоянен, и изменение потенциала Q_0 (1.12) центробежной силы должно компенсироваться изменением потенциала V_0 притяжения, как следует из условия (1.13).

Вынесем в (1.8) отношение $\frac{GM}{b}$ за скобки и перепишем его в виде

$$V^\vartheta = \frac{GM}{b} \left(\frac{b}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{b} + \frac{\omega^2 a_0^2 b}{3GM} \frac{q}{q_0} \left(\frac{3}{2} \sin^2 u - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Используем ряд

$$\operatorname{arctg} \frac{E}{b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{E}{b} \right)^{2n+1} = \frac{E}{b} - \frac{1}{3} \left(\frac{E}{b} \right)^3 + \dots$$

и разложение (1.10), согласно которому

$$q = \frac{4}{15} \frac{E^3}{b^3} - \dots \quad (1.14)$$

и напишем

$$V^\vartheta = \frac{GM}{b} \left(1 - \frac{E^2}{3b^2} + \dots + \frac{\omega^2 a_0^2}{3GMq_0} \left(\frac{4}{15} \frac{E^3}{b^3} + \dots \right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 u - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (1.15)$$

В результате потенциал притяжения эллипсоида представлен в виде разложения по степеням отношения $1/b$. В это выражение входят всего

четыре постоянные — геоцентрическая гравитационная постоянная GM , малая полуось b_0 отсчетного эллипсоида, линейный эксцентриситет E и угловая скорость ω вращения Земли. Эти постоянные нужно выбрать так, чтобы потенциал притяжения эллипсоида был близок к потенциалу притяжения Земли.

Выбор постоянных GM и ω принципиальных затруднений не вызывает: их нужно взять равными соответствующим величинам для реальной Земли, получаемым из измерений. Но полуоси b_0 и эксцентриситета E у Земли нет, поэтому эти постоянные можно найти, только связав их с доступными измерениям величинами. Такими величинами являются, в частности, коэффициенты A_n^k , B_n^k разложения (1.1) потенциала земного притяжения. Если потенциал (1.15) притяжения эллипсоида также разложить в ряд шаровых функций, можно установить зависимости между параметрами эллипсоида и коэффициентами этого разложения. Причем разложение потенциала притяжения эллипсоида имеет вид (1.3), потому что его потенциал симметричен относительно оси вращения и плоскости экватора. А приравняв некоторые коэффициенты разложения потенциала эллипсоида коэффициентам разложения земного потенциала, можно связать параметры эллипсоида с Землей.

Сравним потенциалы притяжения (1.3) и (1.15). Если в (1.15) было только четыре коэффициента, то выражение (1.3) содержит $N+1$ коэффициент A_{2n}^0 . Это означает, что коэффициенты A_{2n}^0 не могут быть независимыми.

Преобразуем потенциал (1.3), записав в явном виде члены с $n=0$ и $n=1$ и вынесем за скобки член нулевого порядка $\frac{GM}{r}$. Тогда

$$V_H = \frac{GM}{r} \left(1 - \frac{G(C - A_m)}{GM r^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \Phi - \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_{2n}^0}{GM r^{2n}} P_{2n}(\sin \Phi) \right), \quad (1.16)$$

где принято во внимание выражение полинома Лежандра второй степени

$$P_2(\sin \Phi) = \frac{3}{2} \sin^2 \Phi - \frac{1}{2}.$$

Сопоставим потенциалы (1.15) и (1.16). Возьмем произвольную точку на оси Z вращения эллипсоида (см. рис. 1.1). Для точек на оси вращения геоцентрическая широта Φ совпадает с приведенной широтой u , причем обе они равны $\pi/2$, а полуось b совпадает с радиусом-вектором r ,

$$\Phi = u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \equiv b. \quad (1.17)$$

Приравняв потенциалы (1.15) и (1.16) при условии (1.17), находим

$$V_H = \frac{GM}{b} \left(1 - \frac{E^2}{3b^2} + \frac{\omega^2 a_0^2}{3GMq_0} \frac{4}{15} \frac{E^3}{b^2} + \dots \right) = \frac{GM}{b} \left(1 - \frac{G(C - A_m)}{GMb^2} + \dots \right). \quad (1.18)$$

Равенство (1.18) будет выполняться, только если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях b . Приравняем коэффициенты при $1/b^3$:

$$-\frac{1}{3} E^2 + \frac{\omega^2 a_0^2 E^3}{3GM} \frac{4}{15q_0} = -\frac{G(C - A_m)}{GM}. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) — фундаментальное равенство, устанавливающее связь геометрических параметров эллипсоида (эксцентриситета E , большой полуоси a_0 , коэффициента q_0) с физическими параметрами Земли (*стоксовыми постоянными* GM и $G(C - A_m)$).

Введем в (1.19) безразмерный эксцентриситет e . По определению $E = ae = \text{const}$, поэтому для отсчетного эллипсоида $E = a_0 e_0$ и (1.19) получает вид

$$e_0^2 - \frac{\omega^2 a_0^3}{GM} \frac{4e_0^3}{15q_0} = 3 \frac{G(C - A_m)}{GMa_0^2}. \quad (1.20)$$

Введем обозначения $m = \frac{\omega^2 a_0^3}{GM}$, $J_2 = \frac{G(C - A_m)}{GMa_0^2}$, получим

$$e_0^2 - m \frac{4e_0^3}{15q_0} = 3J_2. \quad (1.21)$$

Формула (1.21) — вторая форма связи геометрических и физических параметров; параметр J_2 называют *зональный гармонический коэффициент второй степени*. В отличие от (1.19) все величины, входящие в (1.21), безразмерны.

Выясним физический смысл параметров m и J_2 . Запишем параметр m в виде

$$m = \frac{\omega^2 a_0}{\frac{GM}{a_0^2}}.$$

Произведение $\omega^2 a_0$ — это центробежная сила на экваторе уровня эллипсоида, а $\frac{GM}{a_0^2}$ можно считать равной силе притяжения на его экваторе. Произведение Ma_0^2 представляет собой момент инерции

массы M относительно оси вращения эллипсоида. Это максимально возможное значение полярного момента инерции, которое было бы в том случае, если бы вся масса эллипсоида находилась на его экваторе, на расстоянии a_0 от оси вращения. Таким образом:

m — отношение центробежной силы к силе притяжения на экваторе;

J_2 — отношение разности полярного и экваториального моментов инерции к максимальному моменту инерции.

Равенства (1.19)–(1.21) между геометрическими a_0 , E , q_0 , e и физическими GM , $G(C-A_m)$, m , J_2 параметрами уровенного эллипсоида точные. Часто используют приближенные соотношения между ними. Если в (1.14) не учитывать отличие первого $e = E/a$ и второго $e' = E/b$ эксцентриситетов и положить $e \approx E/b$, можно принять с точностью по

порядка сжатия эллипсоида $\frac{4e_0^3}{15q_0} \cong 1$, тогда $e_0^2 = 3J_2 + m$, и для сжатия эллипсоида с учетом зависимости $e^2 \approx 2\alpha$ $\alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}m$.

Параметры, определяющие поле силы тяжести нормальной Земли, называют *фундаментальными геодезическими постоянными*. Соотношения между фундаментальными постоянными и методами их определения рассматривают в курсе высшей геодезии.

Введем в (1.3) или (1.16) новые безразмерные коэффициенты J_{2n} по правилу

$$J_{2n} = -\frac{A_{2n}^0}{GMa_0^{2n}}.$$

Потенциал (1.16) притяжения примет вид

$$V_H = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_1^N J_{2n} \left(\frac{a_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \right]. \quad (1.22)$$

Этот ряд сходится очень быстро. Его коэффициенты J_{2n} зависят только от коэффициента J_2 и эксцентриситета e_0 уровенного эллипсоида, убывают пропорционально e_0^{2n-2} и уже для $n=3$ составляют около $10^{-6}J_2$. Поэтому в ряде (1.22) обычно удерживают члены только до $n=4$ включительно. Потенциал притяжения уровенного эллипсоида вычисляют как по замкнутой формуле (1.8), так и с помощью ряда (1.22).

1.3. Внешний потенциал силы тяжести уровня эллипсоида

Поскольку потенциал U силы тяжести равен сумме потенциала V притяжения и потенциала Q центробежной силы, для его определения нужно добавить к (1.8) или (1.22) центробежный потенциал. Предварительно выразим центробежный потенциал в эллипсоидальной системе координат b, u :

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(b^2 + E^2)\cos^2 u = \frac{\omega^2}{3}(b^2 + E^2)[1 - P_2(\sin u)]. \quad (1.23)$$

После этого, суммируя (1.8) и (1.23), получаем внешний потенциал силы тяжести уровня эллипсоида вращения

$$U = \frac{GM}{E} \arctg \frac{E}{b} + \frac{\omega^2 a^2}{3} + \frac{\omega^2}{3} \left[a_0^2 \frac{q}{q_0} - a^2 \right] \left(\frac{3}{2} \sin^2 u - \frac{1}{2} \right), \quad (1.24)$$

где функции q, q_0 определены выражениями (1.9), (1.10).

В этом выражении постоянными параметрами являются GM, a_0, E, ω, q_0 . Так как большая полуось и параметр q_0 определяются через постоянные E и b_0 , для определения потенциала силы тяжести уровня эллипсоида (нормальной Земли) нужно знать постоянные GM, b_0, E, ω .

На поверхности уровня эллипсоида, полагая в (1.24) $b = b_0$, находим

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctg \frac{E}{b_0} + \frac{\omega^2}{3}(b_0^2 + E^2). \quad (1.25)$$

На любом другом эллипсоиде при $b \neq b_0$ потенциал зависит от широты u . Это означает, что только одна уровенная поверхность $U = U_0$ потенциала силы тяжести является эллипсоидом вращения.

Найдем выражение для потенциала U_0 силы тяжести на поверхности эллипсоида в геоцентрической системе координат r, Φ . Потенциал силы тяжести в произвольной точке получим, добавляя к потенциалу притяжения (1.22) центробежный потенциал (1.4), также выраженный в координатах r, Φ . После небольших преобразований потенциал силы тяжести будет выглядеть так

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_1^N J_{2n} \left(\frac{a_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) + \frac{m}{3} \left(\frac{r}{a_0} \right)^3 \{1 - P_2(\sin \Phi)\} \right]. \quad (1.26)$$

На поверхности уровня эллипсоида потенциал постоянен, поэтому для нахождения U_0 достаточно вычислить потенциал (1.26)

в любой точке эллипсоида. Если выбрать точку на экваторе, то $r = a_0$, $\Phi = 0$ и

$$U_0 = \frac{GM}{a_0} \left[1 - \sum_{n=1}^N J_{2n} P_{2n}(0) + \frac{m}{2} \right]. \quad (1.27)$$

Поскольку коэффициенты J_{2n} зависят от J_2 и e_0 , для нахождения потенциала на поверхности уровненного эллипсоида нужно знать постоянные GM, a_0, J_2, e_0 .

Таким образом, на поверхности уровненного эллипсоида (нормальной Земли) потенциал силы тяжести можно найти или по замкнутой формуле (1.25), используя постоянные GM, E, b_0, ω , или с помощью ряда (1.27), зная GM, a_0, J_2, e_0 .

1.4. Сила тяжести на поверхности уровненного эллипсоида

Согласно определению потенциала, сила является производной потенциала. Чтобы найти силу тяжести γ_0 на эллипсоиде, нужно получить производную потенциала U по нормали n к уровненной поверхности эллипсоида

$$\gamma_0 = - \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{b=b_0}.$$

Знак «минус» в этой формуле означает, что дифференцирование потенциала выполняют по направлению *внешней нормали*, противоположному направлению силы тяжести.

В системе координат b, u для силы тяжести можно написать

$$\gamma_0 = - \frac{a_0}{\sqrt{b_0^2 + E^2 \sin^2 u}} \frac{\partial U}{\partial b} \Big|_{b=b_0}.$$

После дифференцирования (1.24) можно найти выражение, определяющее нормальную силу тяжести в любой точке эллипсоида. Так как (1.24) содержит только независимые от широты u и поэтому постоянные на поверхности эллипсоида члены и член, содержащий $\sin^2 u$, производная потенциала на поверхности эллипсоида также должна быть функцией такого же вида, и поэтому можно написать

$$\frac{\partial U}{\partial b} \Big|_{b=b_0} = B_0 + B_2 \sin^2 u$$

и

$$\gamma_0 = - \frac{a}{\sqrt{b_0^2 + E^2 \sin^2 u}} (B_0 + B_2 \sin^2 u), \quad (1.28)$$

где B и B_0 постоянные, подлежащие определению.

Положим в (1.28) $u = \pi/2$, тогда для силы тяжести γ_p на полюсе эллипсоида получим

$$\gamma_p = \gamma_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) = - \frac{a_0}{\sqrt{b_0^2 + E^2}} \frac{\partial U}{\partial b} \Big|_{b=b_0} = -(B_0 + B_2).$$

Теперь получим силу тяжести γ_e на экваторе эллипсоида; из (1.28) при

$u=0$; $\gamma_e = \frac{a_0}{b_0} B_0 \Rightarrow B_0 = -\frac{b}{a} \gamma_e$. С этим значением B_0 и выражением для

γ_p находим $B_2 = \frac{b}{a} \gamma_e - \gamma_p$. Силу тяжести γ_e называют *экваториальной постоянной*.

Подставив полученные коэффициенты B_0 и B_2 в выражение (1.28), после небольших преобразований для силы тяжести γ_0 в произвольной точке эллипсоида с широтой u получаем

$$\gamma_0 = \frac{b_0 \gamma_e \cos^2 u + a_0 \gamma_p \sin^2 u}{\sqrt{a_0^2 \sin^2 u + b_0^2 \cos^2 u}}.$$

Обычно силу тяжести выражают как функцию геодезической широты B , используя известное из курса высшей геодезии соотношение между геодезической B и приведенной u широтами

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

Тогда

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_e a_0 \cos^2 B + \gamma_p b_0 \sin^2 B}{\sqrt{a_0^2 \cos^2 B + b_0^2 \sin^2 B}}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) получена в 1929 г. итальянским геодезистом К. Сомильяна (1860–1955). Ее часто записывают в виде

$$\gamma_0 = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (1.30)$$

где $k = \frac{b_0 \gamma_p - a_0 \gamma_e}{a_0 \gamma_e}$.

Введем в (1.29) сжатие α уровенного эллипсоида и коэффициент β , равный отношению разности силы тяжести на полюсе и экваторе к силе тяжести на экваторе

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}.$$

Используя зависимости $b_0 = a_0(1 - \alpha)$, $\gamma_p = \gamma_e(1 + \beta)$, получим приближенную формулу

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B + \dots), \quad (1.31)$$

$$\text{где } \beta_1 = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta.$$

Формулы (1.29)–(1.31) называют формулами распределения нормальной силы тяжести или *нормальными формулами*. С точностью порядка сжатия формула (1.31) была известна уже Ньютону (1643–1727) и Клеро. Член $\beta_1 \sin^2 2B$ второго порядка относительно сжатия в нормальную формулу включил Гельмерт (1843–1917). Конечно, закон изменения силы тяжести на поверхности Земли первоначально устанавливали на основании имеющихся измерений и суждений о внутреннем строении Земли, а не как формальное преобразование формулы (1.29) для силы тяжести эллипсоида.

Из формул (1.29)–(1.31) следует, что на поверхности уровня эллипсоида нормальная сила тяжести не постоянна и зависит от широты. Максимальное значение сила тяжести имеет на полюсе, где

$$\gamma_p = 983,22 \text{ гал.} \quad (1.32)$$

На экваторе сила тяжести минимальна

$$\gamma_e = 978,03 \text{ гал} \quad (1.33)$$

Увеличение силы тяжести на полюсе вызвано тем, что здесь центробежная сила равна нулю, а из-за сжатия точка на полюсе находится ближе к центру масс Земли по сравнению с точкой на экваторе, что вызывает увеличение силы притяжения. На экваторе центробежная сила максимальна и направлена прямо противоположно силе притяжения.

1.5. Нормальная сила тяжести во внешней точке. Силовые линии и уровенные поверхности вблизи Земли

Формулы (1.29)–(1.31) позволяют получить силу тяжести только на поверхности эллипсоида. Во внешнем пространстве силу тяжести можно найти, дифференцируя выражения (1.24) или (1.26) по нормали к внешней уровенной поверхности. Однако в этом случае уровенная поверхность не совпадает с поверхностью $b = \text{const}$ и потенциал на координатной эллипсоидальной поверхности зависит от широты. Поэтому нормальную

силу тяжести вне эллипсоида следует находить из выражения

$$(\gamma)^2 = \left(\frac{\partial U}{h_1 \partial b} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{h_2 \partial u} \right)^2, \quad (1.34)$$

определяя ее составляющие по направлениям нормали и касательной к поверхности эллипсоида, h_1 и h_2 коэффициенты. Точное выражение для нормальной силы тяжести, найденное таким путем, оказывается достаточно громоздким, поэтому вблизи Земли для ее вычисления используют иной путь.

Для вычисления нормальной силы тяжести на физической поверхности Земли, вблизи эллипсоида, удобнее использовать ряд Тейлора

$$\gamma = \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 H + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \right)_0 H^2 + \dots, \quad (1.35)$$

где H — высота точки над эллипсоидом; производные относятся к поверхности эллипсоида.

Если ограничиться только первыми членами ряда, для внешней силы тяжести можно написать

$$\gamma = \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 H.$$

Производную $\frac{\partial \gamma}{\partial H}$, определяющую скорость изменения силы тяжести при изменении высоты, называют *вертикальным градиентом нормальной силы тяжести*.

Оценим приближенное значение вертикального градиента, приняв за нормальную силу тяжести силу притяжения сферической Земли,

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}.$$

Для Земли сферической направление высоты H совпадает с направлением радиуса-вектора r , поэтому для вертикального градиента можно написать

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2GM}{r^3} = -\frac{2\gamma}{r}. \quad (1.36)$$

Вертикальный градиент зависит от расстояния r до центра Земли. На поверхности Земли для средних значений $\gamma = 980$ гал, $r = 6371$ км,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = 0,308 \text{ мгл/м.}$$

Найдем точное значение градиента на поверхности эллипсоида. Используем прямоугольную топоцентрическую систему координат x, y, z . Если направить ось z по касательной к силовой линии нормального поля, противоположно высоте H , то вертикальный градиент будет второй производной нормального потенциала

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -\frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Нормальный потенциал вне эллипсоида удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2,$$

из которого получим

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2\omega^2. \quad (1.37)$$

Вторые производные потенциала в горизонтальных направлениях связаны с кривизной уровенной поверхности. Среднюю кривизну уровенной поверхности действительного поля определяет выражение

$$\frac{1}{\rho_{y.l.}} = -\frac{1}{2g} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad (1.38)$$

где $\rho_{y.l.}$ — средний радиус кривизны уровенной поверхности в точке.

Но кривизна уровенного эллипсоида известна и равна среднему арифметическому из кривизн главных нормальных сечений (меридиана и первого вертикала), т.е. в нормальном поле

$$\frac{1}{\rho_{y.l.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right),$$

где M и N — радиусы кривизны меридиана и первого вертикала соответственно.

С другой стороны, применив (1.37) к нормальному полю, найдем

$$\frac{1}{\rho_{y.l.}} = -\frac{1}{2\gamma_0} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right).$$

Приравняв два последних выражения, получаем для суммы вторых производных в горизонтальных направлениях

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\gamma_0 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right). \quad (1.39)$$

Если ось x направлена по касательной к меридиану на север, а ось y — по касательной к параллели на восток, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\gamma_0}{M}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\gamma_0}{N}. \quad (1.40)$$

Используя формулы (1.37) и (1.39), получаем для вертикального градиента силы тяжести на поверхности эллипсоида

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 = -\gamma_0 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - 2\omega^2. \quad (1.41)$$

Радиусы кривизны меридиана и первого вертикала определены формулами, известными из курса высшей геодезии

$$M = \frac{a_0(1-e_0^2)}{(1-e_0^2 \sin^2 B)^{3/2}}, \quad N = \frac{a_0}{\sqrt{1-e_0^2 \sin^2 B}}.$$

Оценим величину члена $2\omega^2$. Приняв $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, получим $2\omega^2 = 10,6 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}$ или всего лишь 10,6 Е (Е — этвеш — единица измерения вторых производных потенциала; $1\text{Е} = 10^{-9} \text{ с}^{-2} = 1 \text{ мгл/10км}$).

Нормальная сила тяжести γ_0 и радиусы кривизны M, N на поверхности эллипсоида изменяются с широтой, поэтому вертикальный градиент также зависит от широты, изменяясь от 3083 Е на полюсе до 3088 Е на экваторе. Сила тяжести на полюсе медленнее убывает с высотой, чем на экваторе, где, помимо убывания силы притяжения, возрастает пропорционально высоте центробежная сила.

Приближенно для средних значений силы тяжести и радиусов кривизны

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)_0 \cong -0,3086 \text{ мгл/м} = -3086 \text{ Е}.$$

Таким образом, нормальную силу тяжести на высоте H над эллипсоидом можно найти по формуле

$$\gamma = \gamma_0 - 0,3086H.$$

Здесь высота выражена в метрах, сила тяжести в миллигалах. Формула обеспечивает вычисление нормальной силы тяжести с точностью выше 0,1 мгл для высот, меньших 1 км. При более точных вычислениях следует в ряде (1.35) удерживать член, содержащий H^2 , и учитывать зависимость градиента (1.41) от широты. На значительных расстояниях от эллипсоида нормальную силу тяжести нужно находить с использованием (1.34).

Изменение силы тяжести вызывает непараллельность уровенных

поверхностей нормального поля. Представим согласно формуле (3) разность ΔU потенциалов между эллипсоидом и близкой к нему уровенной поверхностью в виде $\Delta U = \gamma_0 H$, где H — высота уровенной поверхности над эллипсоидом. Так как разность потенциалов постоянна для двух уровенных поверхностей, для точек на полюсе и экваторе можно написать $\gamma_p H_p = \gamma_e H_e$ или

$$\frac{H_e}{H_p} = \frac{\gamma_p}{\gamma_e},$$

где H_p и H_e — высота уровенной поверхности на полюсе и экваторе соответственно. Образовав производную пропорцию, найдем для изменения высоты уровенной поверхности

$$H_e - H_p = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} H_p.$$

Используя значения силы тяжести на полюсе и экваторе (1.32) и (1.33), напомним $H_e - H_p = 0,0053 H_p$.

Для $H = 100$ м $H_e - H_p = 0,53$ м, т.е. уровенная поверхность, проходящая на полюсе на высоте 100 м над эллипсоидом, на экваторе находится на 53 см выше. Т.е. напряженность поля выше на полюсе и здесь расстояние между уровенными поверхностями меньше, чем между этими же поверхностями на экваторе. Из-за более быстрого убывания с высотой силы тяжести на экваторе по сравнению с силой тяжести на полюсе разность полярной и экваториальной силы тяжести возрастает. Вследствие этого с возрастанием высоты растет разность расстояния между двумя близкими уровенными поверхностями на полюсе и экваторе и сжатие нормальной уровенной поверхности увеличивается.

От долготы нормальная сила тяжести не зависит, поэтому при перемещении вдоль параллели расстояние между уровенными поверхностями нормального поля не меняется (рис. 1.2).

Вследствие непараллельности нормальных уровенных поверхностей нормаль к этим поверхностям изменяет направление и силовая линия искривляется. Для кривизны силовой линии известно выражение

$$\frac{\bar{v}}{\rho_{с.л.}} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \bar{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \bar{j} \right),$$

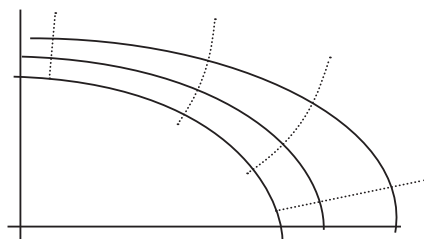


Рис. 1.2. Силовые линии (—) и уровенные поверхности (-----) нормального поля вблизи нормальной Земли

где $\rho_{с.л.}$ — радиус кривизны силовой линии; $\bar{v}$ — единичный вектор главной нормали; $\bar{i}, \bar{j}$ — единичные векторы координатных осей.

Нормальный потенциал и нормальная сила тяжести не зависят от долготы, поэтому если ось y направлена по касательной к параллели, производная $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ будет равна нулю и для кривизны нормальной силовой линии получим

$$\frac{1}{\rho_{с.л.}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}. \quad (1.42)$$

Это означает, что нормальная силовая линия — плоская кривая, лежащая в плоскости меридиана. Представив дифференциал dx элементарной дугой меридиана, $dx = M dB$, и вспомнив, что $dU/dz = \gamma$, если ось z совмещена с направлением силы тяжести, найдем для кривизны нормальной силовой линии $\frac{1}{\rho_{с.л.}} = \frac{1}{\gamma M} \frac{\partial \gamma}{\partial B}$.

На поверхности эллипсоида зависимость нормальной силы тяжести от широты определена формулой (1.31). Дифференцируя (1.31) по широте и отбрасывая при этом малый член $\beta_1 \sin^2 2B$, найдем $d\gamma_0 = \gamma_e \beta \sin 2B dB$. Полагая $\gamma \cong \gamma_e$, а радиус M кривизны меридиана равным среднему радиусу R , получим

$$\frac{1}{\rho_{с.л.}} = \frac{\beta}{R} \sin 2B. \quad (1.43)$$

Силовые линии нормального поля обращены вогнутостью к оси вращения эллипсоида. Наибольшую кривизну они имеют на широте 45° (см. рис.1.2).

Выше была найдена разность высот уровенной поверхности над эллипсоидом на экваторе и полюсе. Для практики больший интерес представляет оценка непараллельности двух близких уровенных поверхностей $U=U_1$ и $U=U_2$ на небольших расстояниях dx (рис.1.3). В этом случае малую дугу уровенной поверхности можно считать рав-

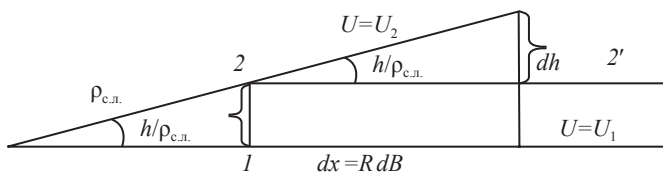


Рис. 1.3. Непараллельность уровенных поверхностей

ной отрезку касательной к ней. Угол между касательными к уровенным поверхностям $U=U_1$ и $U=U_2$, проведенными в точках 1 и 2, равен отношению расстояния h между этими точками к радиусу кривизны силовой линии, h — дуга силовой линии. Проведем линию 2–2', параллельную уровенной поверхности $U=U_1$, и для превышения dh найдем

$$dh=dx \, h/\rho_{\text{с.л.}}, \quad (1.44)$$

после подстановки в выражение (1.41) радиуса кривизны силовой линии получим

$$dh=(\beta/R)h \sin 2B dx. \quad (1.45)$$

На широте 45° при $h=10$ м $dh=0,008$ мм даже для расстояния $dx=1$ км. В геометрическом нивелировании расстояние между рейками не превышает 100–150 м, расстояние h между уровенными поверхностями (нивелирное превышение) — 3 м. В этом случае превышение dh одной уровенной поверхности над другой составит 0,0003 мм. Поэтому при нивелировании на каждой станции нормальные уровенные поверхности можно считать параллельными. Однако непараллельность нормальных уровенных поверхностей вызывает систематическое изменение высоты. Этот эффект учитывают введением специальной поправки в результаты геометрического нивелирования.

1.6. Система координат в нормальном поле

Силовые линии и уровенные поверхности нормального поля можно использовать в качестве координатных линий и поверхностей, аналогично тому, как это было сделано в натуральной системе координат φ, λ, W_0-W . Назовем координатами точки в нормальном поле нормальную широту B^N , долготу L и нормальное геопотенциальное число U_0-U . Дадим определение этих понятий:

нормальная широта B^N — угол между направлением нормальной силы тяжести и плоскостью экватора;

долгота L — угол между плоскостью начального меридиана и меридиана данной точки; поскольку нормальная силовая линия лежит в плоскости геодезического меридиана, долгота в нормальном поле совпадает с геодезической;

нормальное геопотенциальное число U_0-U — разность нормальных потенциалов между эллипсоидом и данной точкой.

Наряду с геопотенциальным числом в качестве третьей координаты можно использовать *высоту в нормальном поле* — отрезок нормальной силовой линии от точки P_1 пересечения силовой линии с поверхностью

уровенного эллипсоида до точки P .

Высота и широта в нормальном поле и геодезические широта и высота показаны на рис. 1.4. Из-за кривизны нормальной силовой линии широта и высота в нормальном поле отличаются от геодезических. Сравним эти координаты. Нормальная широта как внешний угол треугольника Ppp_2 равна сумме геодезической широты и угла ε между нормалью PP_0 к эллипсоиду и отвесной линией Pp_2 нормального поля. Оценим угол ε . Будем считать отрезок $P_1P = H_H$ силовой линии от эллипсоида до точки P дугой окружности радиуса $r_{\text{с.л.}}$. Проведем касательную p_1p_1' к этой окружности в точке P_1 пересечения силовой линии с эллипсоидом; эта касательная является нормалью к эллипсоиду в точке P_1 . Угол между касательной p_1p_1' и вектором нормальной силы тяжести отличается от угла ε из-за различия направлений нормалей к эллипсоиду в точках P_0 и P_1 . Поскольку точки P_0 и P_1 близки между собой, можно не учитывать это отличие и считать угол между отвесной линией Pp_2 и линией p_1p_1' равным ε . Так как угол между касательными равен центральному углу окружности, соответствующему дуге H_H , получаем

$$\varepsilon = \frac{H_H}{\rho_{c, \text{л}}} = \frac{H_H \beta}{R} \sin 2B.$$

Используя среднее значение радиуса кривизны, для угла ε получают

$$\varepsilon = 0,171'' H \sin 2B, \quad (1.46)$$

высота H выражена в километрах. Поскольку угол ϵ мал, в формуле (1.46) вместо высоты H_H использована геодезическая высота H .

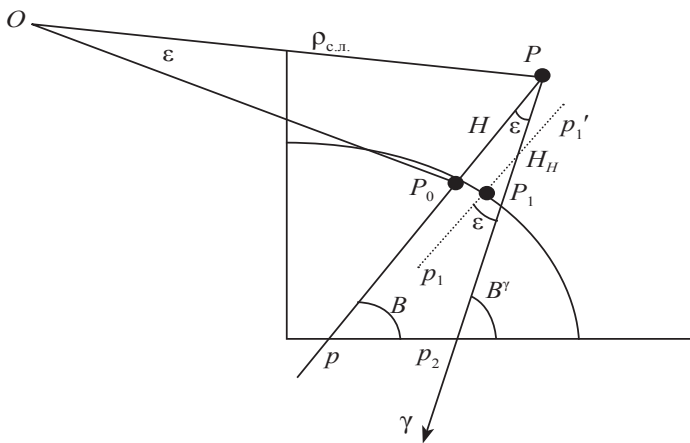


Рис. 1.4. Кривизна силовой линии и система координат в нормальном поле

Согласно (1.46), угол между нормальной силой тяжести и нормалью к эллипсоиду достигает значения $0,2''$ на широте 45° , если высота точки над эллипсоидом равна 1 км.

Используя полученное для ϵ выражение, находим связь широты в нормальном поле с геодезической

$$B' = B + 0,171'' H \sin 2B. \quad (1.47)$$

Нормальная широта всегда больше геодезической. Их отличие существенно и учитывается при точных вычислениях.

Установим связь высоты в нормальном поле с нормальным геопотенциальным числом. На рис. 1.5 dH_H — отрезок силовой линии PP_1 между двумя близкими уровнями поверхностями нормального поля. Между разностью dU потенциалов на этих поверхностях, нормальной силой тяжести γ и расстоянием dH_H существует зависимость

$$dU = -\gamma dH_H.$$

Интегрируя это выражение вдоль силовой линии PP_1 , получим

$$\int_{P_1}^P dU = -(U_0 - U) = -\int_{P_1}^P \gamma dH_H = -\gamma_m \int_{P_1}^P dH_H = -\gamma_m H_H$$

откуда

$$H_H = \frac{U_0 - U}{\gamma_m}, \quad (1.48)$$

где γ_m — среднее интегральное значение нормальной силы тяжести на отрезке PP_1 силовой линии.

Определим разность геодезической высоты и высоты в нормальном поле. Считаем опять отрезок PP_1 силовой линии на рис. 1.4 дугой окружности, тогда

$$H_H = \epsilon \rho_{\text{с.л.}}, \quad H = \rho_{\text{с.л.}} \sin \epsilon,$$

поэтому, так как $\epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} - \dots$,

$$H_H - H = \frac{\epsilon^3}{3!} \rho_{\text{с.л.}} = \frac{\beta^2 H^3}{6R^2} \sin^2 2B.$$

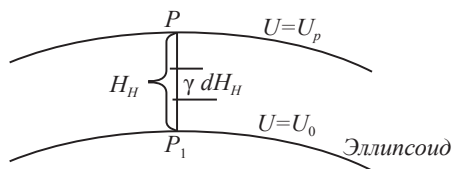


Рис. 1.5. Высота в нормальном поле

Максимальной величины разность высот достигает на широте 45° . Но даже в этом случае отличие высоты в нормальном поле и геодезической высоты составит всего 10^{-5} мм при $H = 10$ км, поэто-

му практически можно считать эти высоты одинаковыми.

Оценим расстояние между точками P_0 и P_1 пересечения эллипсоида нормалью к его поверхности и силовой линией (см. рис. 1.4). Если не принимать во внимание несовпадение точки P_0 и точки пересечения нормали к эллипсоиду с линией OP_1 , то

$$P_0P_1 = OP_1 - OP_0 = \rho_{\text{с.л.}} - \rho_{\text{с.л.}} \cos \varepsilon \cong \frac{\varepsilon^2}{2} \rho_{\text{с.л.}} = \frac{\varepsilon H}{2},$$

где O — центр кривизны дуги PP_1 .

Подставив сюда выражение для угла ε , найдем

$$P_0P_1 = \frac{1}{2} \frac{\beta H^2}{R} \sin 2\beta.$$

Для среднего радиуса Земли $R = 6371$ км $P_0P_1 = 0,392 H^2 \sin 2\beta$, где высота H выражена в километрах, а расстояние P_0P_1 — в миллиметрах. Для высоты в 1 км расстояние между пересечением нормали к эллипсоиду и силовой линией составит всего 0,4 мм, а для максимально возможной на Земле высоты 10 км — 4 см. Поэтому практически проекции точки P на эллипсоид по нормали к его поверхности и по силовой линии нормального поля неразличимы.

Таким образом, долгота и высота в нормальном поле совпадают с геодезическими, а для перехода от одной системы широт к другой следует учитывать поправку (1.46) за кривизну нормальной силовой линии и пользоваться формулой (1.47).

ГЛАВА 2. АНОМАЛЬНОЕ ПОЛЕ. АНОМАЛИЯ ВЫСОТЫ, УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСА И АНОМАЛИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В гл. 1 введено понятие аномального потенциала T как разности потенциалов действительной и нормальной Земли:

$$T = W - U. \quad (2.1)$$

Этот потенциал образует аномальное гравитационное поле — разностное поле, возникающее из-за отличия поля реальной Земли от нормального. Аномальное поле представляют и другие величины, используемые в геодезии. Рассмотрим некоторые из них.

2.1. Аномальный потенциал и аномалия высоты

Возьмем произвольную точку P в поле силы тяжести. Через эту точку проходят уровенные поверхности реального и нормального поля, на которых потенциалы равны W_p и U_p соответственно, γ нормальная сила тяжести в точке P (рис.2.1). Нормальный потенциал введем с соблюдением таких условий: масса нормальной Земли равна массе действительной, центры масс совпадают.

Проведем уровенную поверхность $U = W_p$ нормального поля, на которой нормальный потенциал равен действительному потенциалу W_p в

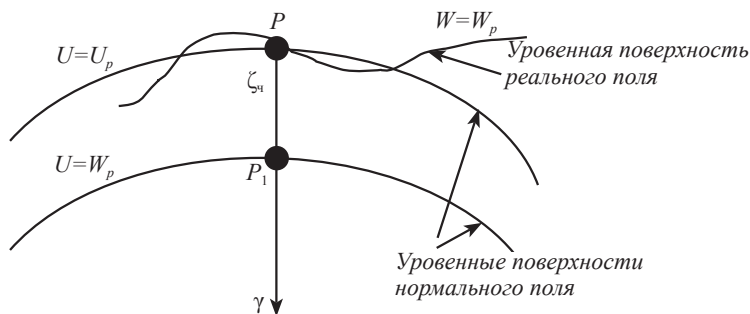


Рис. 2.1. Чистая аномалия высоты

точке P . Конечно, эта уровенная поверхность не пройдет через точку P , если только аномальный потенциал в этой точке не будет равен нулю. Вектор γ нормальной силы тяжести пересечет поверхность $U=W_p$ в точке P_1 . Поскольку в точке P нормальный потенциал согласно (2.1) равен разности действительного и аномального потенциалов,

$$U_p = W_p - T_p, \quad (2.2)$$

разность $U_{P_1} - U_p$ нормальных потенциалов между уровенными поверхностями $U=U_p$ и $U=U_{P_1}=W_p$, проходящими через точки P и P_1 , равна аномальному потенциалу T в точке P .

Так как аномальный потенциал мал, рассматриваемые нормальные уровенные поверхности близки между собой и вектор γ будет перпендикулярен к обеим поверхностям. Расстояние PP_1 между уровенными поверхностями $U=U_p$ и $U=W_p$ назовем чистой аномалией высоты. Таким образом, чистая аномалия высоты ζ_q — это расстояние между уровенными поверхностями нормального поля, для которых разность нормальных потенциалов равна аномальному потенциалу T .

Выразим аномалию высоты через аномальный потенциал. В первой части курса мы выяснили физический смысл разности потенциалов: это работа, которую совершает сила тяжести при перемещении единичной массы с одной уровенной поверхности на другую. Из курса физики известно, что работа по перемещению единичной массы из одной точки в другую численно равна произведению проекции силы на направление перемещения на величину этого перемещения, поэтому работа, совершаемая силой γ при перемещении из точки P в точку P_1 на уровенную поверхность $U=W_p$ равна произведению $\gamma\zeta_q$, где γ — модуль вектора γ . Но эта работа равна разности потенциалов, т.е. потенциалу T , значит $T=\gamma\zeta_q$, откуда следует

$$\zeta_q = \frac{T}{\gamma}. \quad (2.3)$$

Формулу (2.3) называют *формулой или леммой Брунса* (Г. Брунс, 1848–1919). Она связывает физическую величину — разность потенциалов T — с величиной геометрической — расстоянием ζ_q между уровенными поверхностями нормального поля и тем самым более наглядно представляет аномальный потенциал и аномальное поле.

Выясним теперь смысл первых производных аномального потенциала.

2.2. Уклонение отвеса и чистая аномалия силы тяжести

На рис. 2.2 P — точка поверхности Земли; x, y, z — топоцентрическая система координат; ось z совмещена с вектором γ нормальной силы тяжести; ось x направлена по касательной к меридиану на север; ось y — на восток. Действительная сила тяжести $\mathbf{g}$ не совпадает с нормальной по величине и направлению. Угол θ между направлениями действительной и нормальной силы тяжести называют *гравиметрическим уклонением отвеса*, а разность модулей этих сил — *аномалией силы тяжести*.

Разложим вектор $\mathbf{g}$ действительной силы тяжести на составляющие g_x, g_y, g_z по осям координат. На рис. 2.2 составляющие по осям x и y противоположны направлениям этих осей, потому что вектор реальной силы тяжести отклонился к юго-западу от нормального. Условились считать, что при таком взаимном положении действительной и нормальной силы тяжести уклонение отвеса положительно.

Установим связь уклонения отвеса с аномальным потенциалом. Линии Pg (см. рис. 2.2, б, в) являются проекциями вектора $\mathbf{g}$ силы тяжести на плоскости меридиана и первого вертикала. Поэтому углы между Pg и осью z будут составляющими ξ, η уклонения отвеса θ в плоскостях xPz меридиана и yPz первого вертикала соответственно. Из рис. 2.2 следует

$$\operatorname{tg} \xi = -\frac{g_x}{g_z}, \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{g_y}{g_z}. \quad (2.4)$$

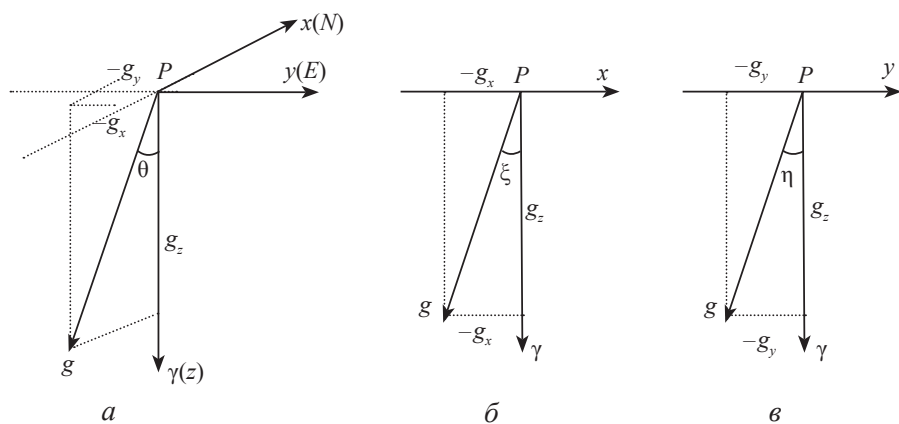


Рис. 2.2. Гравиметрическое уклонение отвеса (а).
Составляющая уклонения отвеса в плоскости меридиана (б)
и в плоскости первого вертикала (в)

Согласно определению потенциала проекции g_x и g_y силы тяжести равны производным ее потенциала W по соответствующим координатам

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Но потенциал W равен сумме нормального U и аномального T потенциалов, поэтому

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ — это составляющие нормальной силы тяже-

сти вдоль осей x и y . Они равны нулю, так как ось z совмещена с нормальной силой тяжести (см. рис. 2.2), оси x и y перпендикулярны к вектору γ и обе его горизонтальные составляющие равны нулю в точке P .

Нормальное поле всегда выбирают близким к действительному, поэтому составляющие уклонения отвеса невелики и не превышают нескольких секунд дуги, а действительная сила тяжести по величине близка к нормальной. В связи с этим в (2.4) можно разложить тангенсы углов в ряд и оставить только первые члены этих разложений, а в знаменателе равенств (2.3) составляющую g_z действительной силы тяжести вдоль оси z заменить нормальной силой тяжести γ . Тогда, учитывая также, что в формулах (2.5) первые члены правых частей равны нулю, получаем

$$\xi = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Формулы (2.6) устанавливают связь уклонения отвеса с аномальным потенциалом.

Выясним теперь смысл производной аномального потенциала по оси z . Дифференцируя (2.1), получим

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Но $\frac{\partial W}{\partial z} = g_z$ — это проекция силы тяжести на ось z , а $\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma$ — нормальная сила тяжести, поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial z} = g_z - \gamma, \quad (2.7)$$

где $g_z = g \cos \theta$. Так как уклонение отвеса θ мало, обычно считают $\cos \theta = 1$ и $g_z = g$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial z} = g - \gamma. \quad (2.8)$$

Разность $g - \gamma$ называют *чистой аномалией силы тяжести*.

Таким образом, мы установили, что первые производные аномального потенциала определяют составляющие уклонения отвесной линии и аномалию силы тяжести, т.е. отличие действительной силы тяжести от нормальной по величине и направлению.

2.3. Связь системы координат в нормальном поле с натуральной системой

Натуральная система координат $\varphi, \lambda, W_0 - W$ связана с силовыми линиями и уровенными поверхностями реального поля Земли.

Система координат в нормальном поле связана с силовыми линиями и уровенными поверхностями нормального поля. Так как нормальное поле не совпадает с действительным, координаты в нормальном поле отличаются от натуральных. Установим связь этих систем.

Рассмотрим рис. 2.3, здесь P — точка поверхности Земли; ось Z прямоугольной системы координат совмещена с осью вращения Земли; ось X лежит в плоскости начального меридиана; OXY — плоскость экватора. Спроектируем точку P на плоскость экватора по нормали PP_0 к нему. В натуральной системе широта φ и долгота λ определены направлением

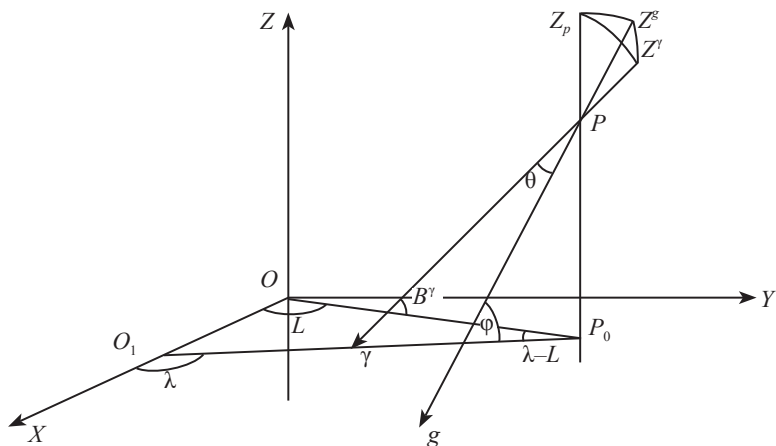


Рис.2.3. К связи натуральной и нормальной систем координат

действительной силы тяжести $\mathbf{g}$, в нормальной системе нормальная широта B' и долгота L — направлением нормальной силы тяжести γ .

Напомним определение нормальных и натуральных координат. Плоскость, проходящая через отвесную линию нормального поля и ось OZ вращения Земли, является плоскостью геодезического меридиана, а угол между этой плоскостью и плоскостью XOZ начального меридиана является геодезической долготой L . Нормальная широта B' — это угол в плоскости геодезического меридиана между направлением нормальной силы тяжести и плоскостью экватора. Плоскость PP_0O_1 , проходящая через действительную отвесную линию и линию PP_0 , параллельную оси вращения Земли, является плоскостью астрономического меридиана. Так как в общем случае отвесная линия реального поля и ось вращения Земли являются скрещивающимися прямыми и не лежат в одной плоскости, плоскость астрономического меридиана не проходит через ось вращения и центр O Земли. Угол λ между плоскостью астрономического меридиана точки P и начального меридиана называют *астрономической долготой*, а угол φ в плоскости астрономического меридиана между отвесной линией и плоскостью экватора — *астрономической широтой*.

Установим связь уклонений отвеса с широтами и долготами в обеих системах. Проведем вокруг точки P (см. рис. 2.3) вспомогательную сферу единичного радиуса и продолжим вверх до пересечения с этой сферой нормаль PP_0 и отвесные линии действительного и нормального поля. Нормаль пересечет сферу в точке Z_p , отвесная линия реального поля в точке Z^s астрономического зенита, нормальная отвесная линия в точке Z' зенита в нормальном поле. На рис. 2.4 изображен образованный сферический треугольник Z_pZ^sZ' в увеличенном масштабе. Сторона Z_pZ' этого треугольника является дополнением нормальной широты до 90° , сторона Z_pZ^s — дополнение астрономической широты до 90° , а сторона Z^sZ' — гравиметрическое уклонение отвеса θ . Угол $Z'Z_pZ^s$ равен разности $\lambda - L$ астрономической и геодезической долготы. Поведем через вершину Z^s дугу, перпендикулярную стороне $Z'Z_p$ треугольника. Она пересечет сторону $Z'Z_p$ в точке a . Дуга aZ' является проекцией уклонения отвеса на плоскость меридиана, т.е. составляющей ξ уклонения отвеса в меридиане. Дуга aZ^s — это проекция уклонения отвеса на плоскость первого вертикала, составляющая η уклонения отвеса в плоскости первого вертикала. Из прямоугольного треугольника $aZ'Z^s$ следует

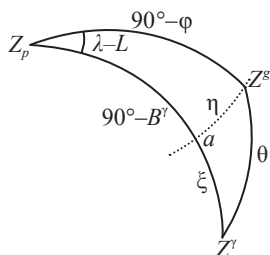


Рис. 2.4. Составляющие гравиметрического уклонения отвеса

$$\xi^2 + \eta^2 = \theta^2, \quad (2.9)$$

где θ — полная величина уклонения отвеса.

Из треугольника aZ_pZ^g по теореме синусов напомним

$$\frac{\sin \eta}{\sin(\lambda - L)} = \sin(90^\circ - \varphi). \quad (2.10)$$

Составляющие уклонения отвеса и разности натуральных и нормальных координат малы и не превышают нескольких секунд дуги. Поэтому в (2.10) можно разложить в левой части синусы в ряд и ограничиться только первыми членами этих разложений. Тогда

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi. \quad (2.11)$$

Теперь для того же треугольника aZ_pZ^g по теореме косинусов напомним

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - B^\gamma - \xi) \cos \eta.$$

Так как угол η мал, можно считать $\cos \eta = 1$, тогда

$$\xi = \varphi - B^\gamma. \quad (2.12)$$

Разности широт и долгот в нормальном и реальном поле являются составляющими гравиметрического уклонения отвеса. Но составляющие гравиметрического уклонения отвеса являются производными аномального потенциала. Поэтому для перехода от астрономических координат к нормальным нужно определить аномальный потенциал.

Полученные связи аномального потенциала с другими элементами аномального поля позволяют пояснить принцип астрономо-гравиметрического метода определения поверхности и гравитационного поля Земли. Прежде всего следует выбрать нормальное поле. Потенциал W силы тяжести согласно (2.1) получится добавлением аномального потенциала к выбранному нормальному $W = U + T$.

Плановые координаты точек поверхности Земли относительно эллипсоида можно найти согласно равенствам

$$B^\gamma = \varphi - \xi = \varphi + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.13)$$

$$L = \lambda - \eta \sec \varphi = \lambda + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \sec \varphi. \quad (2.14)$$

Для получения соотношений (2.13), (2.14) использованы формулы (2.6), (2.11) и (2.12).

Несколько сложнее установить связь геодезической высоты (или высоты в нормальном поле) с аномальным потенциалом. В общем виде

эта связь выглядит таким образом

$$H=H_{\text{всп}}+\Delta H, \quad (2.15)$$

где $H_{\text{всп}}$ — вспомогательная высота; ΔH — поправка, связанная с аномальным потенциалом (методы определения этих величин рассмотрены ниже).

Таким образом, определение и гравитационного поля и поверхности Земли сводится к нахождению аномального потенциала. Определение поверхности Земли означает определение координат всех ее точек в единой системе.

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

К настоящему времени сформировалось два подхода к определению аномального потенциала, основанных на разных принципах использования имеющихся измерений. В первом из них, называемом иногда модельным, разрабатывается математическая теория определения потенциала при некоторых условиях, накладываемых на измерения. Этот подход позволяет установить теоретически связи между измеряемыми в поле силы тяжести величинами с учетом их физической природы и законов, действующих в поле земного притяжения.

Во втором подходе имеющиеся измерения используют, не накладывая на них никаких условий и учитывая их ошибки. Основной задачей в этом подходе, называемом операционным, является поиск оптимального способа совместного использования всех имеющихся данных. Здесь главное внимание уделено рассмотрению результатов измерений как неких функций, обладающих определенными математическими свойствами; физическая сущность при этом отходит на второй план. Это подобно уравниванию по методу наименьших квадратов результатов измерений любых величин независимо от их физической природы, лишь бы только ошибки этих измерений подчинялись определенному закону. Преимуществом такого подхода является формализация задачи и возможность применения стандартных приемов вычислительной математики и техники.

В настоящем тексте лекций рассматривается только модельный подход, позволяющий получить ясное представление о сущности задачи Молоденского определения поверхности и гравитационного поля Земли.

Молоденский для определения физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли использовал наземные измерения: натуральные координаты φ , λ , $W_0 - W$ и силу тяжести g . С появлением спутниковых измерений исходными вместо натуральных координат стали геоцентрические прямоугольные координаты X , Y , Z . Т.е. в первом случае известны распределение потенциала на поверхности Земли и сила

тяжести, а во втором — поверхность Земли и сила тяжести. В обоих случаях предполагается известной угловая скорость вращения Земли, а решение строят с использованием нормального поля, т.е. определяют действительный потенциал как сумму нормального и аномального. В тексте лекций основное внимание уделено определению аномального потенциала по наземным измерениям, поскольку этот метод остается основным не только с теоретической, но и с практической точки зрения, так как результаты измерения силы тяжести в настоящее время представлены в соответствии с теорией Молоденского.

Задачу определения аномального потенциала формулируют как краевую задачу теории потенциала. Так как поверхность Земли, в общем, близка к сферической, в геодезической гравиметрии важную роль играют краевые задачи для сферы. Краткие сведения об основных типах этих задач и принципах их решения даны в приложении 1.

Рассмотрим принципиальные основы задачи Молоденского и ее решения.

3.1. Нормальная высота и поверхность Земли первого приближения

Задача Молоденского формулируется следующим образом: на неизвестной физической поверхности S Земли измерены приращения $W_0 - W$ потенциала силы тяжести и сила тяжести g как функции астрономических координат φ, λ . Известна угловая скорость вращения Земли. Определить физическую поверхность и внешнее гравитационное поле. Задача будет иметь единственное решение, если задана постоянная W_0 . Так как определить одновременно и поверхность и поле невозможно, задача решается приближениями.

В первом приближении поле Земли считается известным — это нормальное гравитационное поле. Тогда действительный потенциал $\tilde{W}$ совпадает с нормальным,

$$\tilde{W} = U, \quad (3.1)$$

а аномальный потенциал

$$\tilde{T} = 0. \quad (3.2)$$

Посмотрим, как в этом случае можно найти поверхность Земли.

По условиям задачи в каждой точке поверхности Земли известно геопотенциальное число $W_0 - W$, т.е. разность потенциалов на уровне моря и в точке P поверхности Земли. Напомним, что геопотенциальное число выводят по результатам геометрического нивелирования и измерений силы тяжести.

Рассмотрим рис. 3.1, здесь P — точка поверхности Земли, через которую проходит нормальная уровенная поверхность $U=U_p$; U_p — нормальный потенциал в точке P . Введем нормальное геопотенциальное число U_0-U_p , равное разности потенциала U_0 на уровенном эллипсоиде и потенциала в точке P . Если бы гравитационное поле Земли совпадало с нормальным и потенциал W_0 на уровне моря был бы равен потенциалу U_0 на уровенном эллипсоиде, нормальное и действительное геопотенциальное число точки P тоже совпали бы. В действительности этого не происходит, и нормальное геопотенциальное число U_0-U_p точки P в общем случае, конечно, не совпадает с ее геопотенциальным числом W_0-W_p :

$$U_0-U_p \neq W_0-W_p.$$

Однако на силовой линии P_1P нормального поля, проходящей через точку P , всегда найдется такая точка P' , в которой нормальное геопотенциальное число тождественно равно действительному:

$$U_0-U_{p'} \equiv W_0-W_p. \quad (3.3)$$

Причем, поскольку нормальный потенциал всегда выбирают близким к действительному, точка P' будет расположена недалеко от точки P .

Точка P' делит дугу P_1P силовой линии на две части: отрезок P_1P' от эллипсоида до точки P' и отрезок $P'P$. Первый из них определяет в нормальном поле высоту точки, в которой выполнено условие (3.3). Поэтому отрезок нормальной силовой линии P_1P' от эллипсоида до точки P' называют *нормальной высотой точки P* и обозначают H' ; индекс γ указывает на принадлежность к нормальному полю. Второй отрезок линии P_1P от точки P' до точки P обозначают ζ и называют *аномалией высоты*.

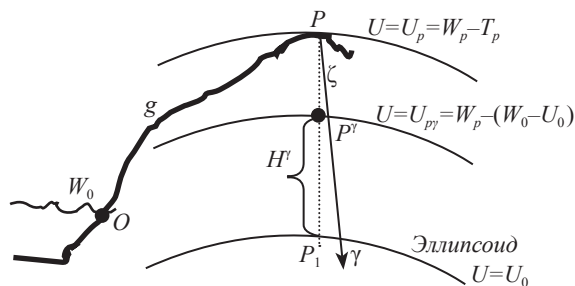


Рис. 3.1. Нормальная высота и аномалия высоты

Подчеркнем отличие высоты в нормальном поле, рассмотренной в разд. 1.6, и нормальной высоты (рис. 3.2). Высота в нормальном поле — это расстояние, измеряемое вдоль силовой линии нормального поля от эллипсоида до любой точки P (см. рис.

1.4 и 1.5); она определяется по формуле (1.48) через разность *нормальных потенциалов* на эллипсоиде и в точке P . Нормальная высота — расстояние вдоль нормальной силовой линии от той же точки P_1 эллипсоида, *но не до точки P , а до точки P'* , в которой выполняется тождество (3.3). Таким образом, нормальная высота определяется в *нормальном* поле по разности *действительных потенциалов*.

Сумма отрезков P_1P' и $P'P$ нормальной силовой линии дает в *нормальном* поле высоту точки P над эллипсоидом (см. рис. 3.1 и 3.2)

$$H_H = H' + \zeta. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) поясняет связь нормальной высоты точки P и ее высоты в нормальном поле. Высота H_H в нормальном поле отличается от геодезической высоты H только из-за кривизны нормальной силовой линии; как показано в разд. 1.6, практически это отличие не ощутимо. Поэтому на рис. 3.1, 3.2 отрезок P_1P можно рассматривать как отрезок нормали к эллипсоиду и считать его равным геодезической высоте, поэтому, сумма отрезков P_1P' и $P'P$ равна *геодезической высоте*

$$H = H' + \zeta. \quad (3.5)$$

Если бы поле Земли было нормальным, аномалия высоты была бы равна нулю и нормальная высота H' была бы равна высоте в нормальном поле и геодезической высоте H . После введения нормальной высоты можно уточнить формулу (2.15), заменив ее на формулу (3.5). Нормальная высота и аномалия высоты были введены М.С. Молоденским в 1945 г.

Получим формулу для нормальной высоты H' . Подставим в (1.48) разность (3.3) нормальных потенциалов точек P_1 и P'

$$H' = \frac{U_o - U_{P'}}{\gamma_m} = \frac{W_o - W_p}{\gamma_m}, \quad (3.6)$$

где γ_m — среднее интегральное значение нормальной силы тяжести на отрезке P_1P' .

Если использовать полученное в предыдущей части курса выражение геопотенциального числа

$$W_o - W_p = \int_{OP} g dh, \quad (3.7)$$

для нормальной высоты получаем

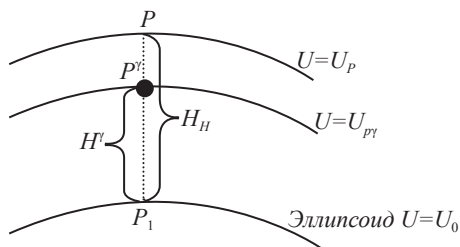


Рис. 3. 2. Высота в нормальном поле и нормальная высота

$$H^{\gamma} = \frac{1}{\gamma_m} \int_{OP} g dh. \quad (3.8)$$

В (3.7), (3.8) интегрирование выполняется вдоль нивелирного хода OP от исходного футштока O на уровне моря до точки P поверхности Земли, g — сила тяжести вдоль нивелирной линии, а значение γ_m нормальной силы тяжести относится к середине отрезка P_1P' (см. рис. 3.1).

Нормальная высота (3.8) определяется по результатам измерений, и ее считают измеренной величиной. После ее введения в натуральной системе координат вместо разности потенциалов (геопотенциального числа) в качестве третьей координаты можно использовать нормальную высоту. Таким образом, в первом приближении, когда выполняются равенства (3.1), (3.2), в формулах (2.13)–(2.15) измеряемые координаты φ , λ , H' точек поверхности Земли совпадают с геодезическими координатами $\tilde{B}$, $\tilde{L}$, $\tilde{H}$. Причем в теории Молоденского предполагается, что измерения выполнены в каждой точке поверхности Земли и ошибки измерений отсутствуют.

Если в каждой точке уровенного эллипсоида отложить по нормали к его поверхности нормальную высоту, получится поверхность (геометрическое место точек P'), которую называют *поверхностью Земли первого приближения* (рис.3.3). Для этой поверхности используют

также названия *теллуroid* и *гипсометрическая поверхность*.

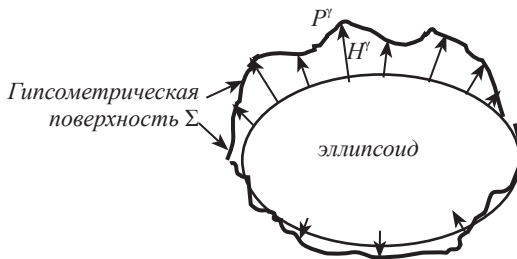


Рис. 3.3. Гипсометрическая поверхность

Поверхность Земли первого приближения в общем повторяет рельеф действительной Земли и отстоит от нее на величину аномалии высоты. Эта поверхность показана на топографических и гипсометрических картах.

3.2. Связь аномалии высоты с аномальным потенциалом

Определим аномалию высоты. Ее получают как расстояние между уровенными поверхностями нормального поля, проходящими через точки P и P' ,

$$\zeta = \frac{U_{P'} - U_P}{\gamma}, \quad (3.9)$$

где γ — среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке ζ .

Определим значения U_p и $U_{p'}$. Нормальный потенциал в любой точке равен разности действительного и аномального потенциалов, поэтому

$$U_p = W_p - T_p, \quad (3.10)$$

а в точке P' на основании тождества (3.1)

$$U_{p'} = W_p - (W_0 - U_0). \quad (3.11)$$

Таким образом, разность нормальных потенциалов в точках P' и P

$$U_{p'} - U_p = T_p - (W_0 - U_0) \quad (3.12)$$

зависит как от аномального потенциала в точке P , так и от разности действительного потенциала на уровне моря и нормального потенциала на уровне эллипсоида. Подставив (3.12) в (3.9), находим для аномалии высоты

$$\zeta = \frac{T_p}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma}. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) устанавливает зависимость между аномалией высоты и аномальным потенциалом в одной и той же точке земной поверхности. Ее называют обобщенной *формулой Брунса*.

Сравним аномалию высоты ζ и чистую аномалию высоты ζ_c (2.3). В (3.13) для аномалии высоты по сравнению с (2.3) появился дополнительный член, содержащий разность $(W_0 - U_0)$ потенциалов на уровне моря и на уровне эллипсоида. Чистая аномалия высоты — это расстояние между уровнями поверхностями нормального поля, разность нормальных потенциалов на которых равна аномальному потенциалу T_p . Аномалия высоты — расстояние между уровнями поверхностями нормального поля, для которых разность нормальных потенциалов равна $T_p - (W_0 - U_0)$. Следовательно, чистая аномалия высоты ζ_c зависит только от аномального потенциала, а аномалия ζ кроме того от выбора начала W_0 счета геопотенциального числа и потенциала U_0 на уровне эллипсоида.

Рассмотрим (3.10) и (3.11). Согласно им в точке P физической поверхности Земли нормальный потенциал отличается от действительного в этой же точке на величину аномального потенциала T_p , а в точке P' нормальный потенциал отличается от действительного потенциала в точке P физической поверхности Земли на величину разности $W_0 - U_0$ потенциалов на уровне моря и отсчетном эллипсоиде, т.е. $W_p - U_{p'} = W_0 - U_0$. Согласно тождеству (3.3) разность действительного потенциала W_p и нормального потенциала $U_{p'}$ постоянна во всех точках и равна разности

$W_0 - U_0$ потенциалов на уровне моря и эллипсоиде.

Если потенциал на уровне моря равен потенциалу на уровне моря, $W_0 = U_0$, то разность нормальных потенциалов в точках P и P' равна аномальному потенциалу T_p , и аномалия высоты становится чистой, а нормальная высота будет высотой над эллипсоидом такой точки, в которой действительный потенциал равен нормальному.

3.3. Связь геодезических координат с аномальным потенциалом

После определения гипсометрической поверхности сформулируем задачу определения поверхности и внешнего гравитационного поля Земли так: измерена поверхность Σ Земли первого приближения (т.е. астрономические координаты φ, λ , нормальная высота H') и сила тяжести g на физической поверхности Земли. Угловая скорость ω вращения Земли известна. Известен также нормальный потенциал U . Определить геодезические координаты точек поверхности и внешний потенциал.

Для определения потенциала W реальной Земли нужно определить аномальный потенциал T . В разд. 2.3 установлено, что для нахождения геодезических координат точек нужно знать составляющие ξ, η гравиметрического уклонения отвеса (см. (2.13), (2.14)), которые в свою очередь согласно (2.6) определяются через аномальный потенциал. Для перехода от нормальной высоты к геодезической нужно найти аномалию высоты ζ (3.5), которая также связана с аномальным потенциалом (3.13). Соберем эти формулы вместе:

$$\begin{aligned} W &= U + T, \\ B^\gamma &= \tilde{B}^\gamma - \xi^{\text{гп}} = \varphi - \xi^{\text{гп}} = \varphi + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ L &= \tilde{L} - \eta \sec \varphi = \lambda - \eta \sec \varphi = \lambda + \frac{1}{\gamma \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ H &= \tilde{H} + \zeta = H^\gamma + \zeta = H^\gamma + \frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, задача определения и физической поверхности и гравитационного поля Земли сводится к определению аномального потенциала.

Аномальный потенциал T находят из решения краевой задачи теории потенциала, смысл которой можно пояснить следующим образом. Если ось вращения и угловая скорость вращения действительной и

нормальной Земли совпадают, центробежный потенциал будет исключен из разности $W-U$, и аномальный потенциал вне Земли будет потенциалом притяжения и будет относиться к классу *гармонических функций*. Эти функции обладают замечательным свойством: они не имеют экстремальных значений внутри области своего существования. Поэтому их можно найти по тем значениям, которые они принимают на границе области своего существования. Значит, аномальный потенциал вне Земли можно найти как гармоническую функцию, используя те условия, которым он подчиняется на границе области его определения, т.е. на поверхности Земли. Такими краевыми условиями могут быть любые формулы, связывающие аномальный потенциал с измеряемыми на Земле величинами. Так, например, в качестве краевых условий можно использовать (2.6) связи аномального потенциала с отклонениями отвеса, (2.3) и (3.13), связывающие аномальный потенциал с аномалиями высоты или (2.8) чистой аномалии силы тяжести. Однако в задаче Молоденского определения поверхности и поля Земли ни одна из величин, входящих в эти формулы, неизвестна; отклонения отвеса и аномалия высоты непосредственно не измеряют, а для вычисления чистой аномалии (2.8) силы тяжести нужно знать геодезическую высоту.

3.4. Связь аномалии силы тяжести с аномальным потенциалом (краевое условие для аномального потенциала)

Установим связь аномального потенциала с измеренной на Земле силой тяжести g . Поскольку ось z в (2.8) совпадает с направлением нормальной силы тяжести и противоположна направлению счета высоты H , напомним ее в виде

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -(g_p - \gamma_p), \quad (3.15)$$

где g_p и γ_p — значения действительной и нормальной силы тяжести в точке P поверхности Земли соответственно (рис. 3.1). Для вычисления нормальной силы тяжести в точке P над уровненным эллипсоидом служит формула (1.35), в которую входит высота этой точки. Используем ее и напомним

$$\gamma_p = \gamma_o + \frac{\partial \gamma}{\partial H} H. \quad (3.16)$$

Поскольку поверхность Земли еще не определена и высота H неизвестна, силу тяжести γ_p вычислить невозможно. Заменим в (3.16) геодезическую высоту суммой нормальной высоты и аномалии высоты согласно (3.5)

$$\gamma_p = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} (H^\gamma + \zeta). \quad (3.17)$$

Нормальная высота точки P над эллипсоидом известна и поэтому можно вычислить нормальную силу тяжести в точке P' теллуроида:

$$\gamma_{p\gamma} = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} H^\gamma,$$

а нормальную силу тяжести в точке P поверхности Земли представить следующим образом:

$$\gamma_p = \gamma_{p\gamma} + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \zeta. \quad (3.18)$$

Но аномалия высоты согласно (3.13) связана с аномальным потенциалом, поэтому

$$\gamma_p = \gamma_{p\gamma} + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \left(\frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \right). \quad (3.19)$$

Здесь ни T , ни $W_0 - U_0$ неизвестны. Подставив в (3.15) последнее равенство, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial H} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} T|_S = -(g_p - \gamma_{p\gamma}) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} (W_0 - U_0). \quad (3.20)$$

В (3.20) в левую часть перенесен член, содержащий неизвестный потенциал T . Все величины, входящие в (3.20), кроме нормальной силы тяжести $\gamma_{p\gamma}$, относятся к точке P физической поверхности S Земли (см. рис. 3.1); нормальная сила тяжести $\gamma_{p\gamma}$ относится к точке P' поверхности Земли первого приближения. Разность

$$\Delta g = g_p - \gamma_{p\gamma} \quad (3.21)$$

действительной силы тяжести g_p в точке P и нормальной силы тяжести $\gamma_{p\gamma}$ в точке P' называют *смешанной аномалией силы тяжести*. Используя зависимость (3.18), для смешанной аномалии получаем

$$\Delta g = g_p - \gamma_p - \frac{\partial \gamma}{\partial H} \zeta. \quad (3.22)$$

Формула (3.22) связывает смешанные Δg и чистые $(g_p - \gamma_p)$ аномалии силы тяжести. Они отличаются на величину изменения нормальной силы тяжести при перемещении от точки P' к точке P .

Уравнение (3.20) связывает аномальный потенциал на поверхности Земли с определяемой по измерениям смешанной аномалией силы тяжести. Оно является *краевым условием* для определения аномального потенциала в классической задаче Молоденского.

3.5. Краевое условие в нулевом приближении

Полученное в разд. 3.4 краевое условие (3.20) относится к неизвестной физической поверхности Земли, а производная аномального потенциала по высоте H является производной по наклонному к поверхности Земли направлению, так как высоты отсчитывают по нормали к поверхности эллипсоида, а не по нормали к физической поверхности Земли. Это затрудняет решение задачи с условием (3.20). Однако, поскольку аномальный потенциал по определению является малой величиной, можно при решении задачи сделать ряд упрощающих предположений.

Во-первых, будем решать задачу в сферическом приближении, т.е. в краевом условии при нахождении коэффициентов не будем учитывать сжатие Земли. Согласно (1.36) в этом случае вертикальный градиент нормальной силы тяжести имеет вид

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -\frac{2}{\rho} \gamma,$$

а направление радиуса-вектора ρ совпадает с направлением высоты H , поэтому вместо (3.20) можно написать

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \Big|_S = -\Delta g + \frac{2(W_0 - U_0)}{\rho}. \quad (3.23)$$

Отвлечемся теперь от физического смысла условия (3.23) и будем рассматривать задачу определения потенциала T как чисто математическую задачу нахождения гармонической функции, удовлетворяющей условию (3.23) на неизвестной поверхности S . Заменяем эту неизвестную поверхность близкой к ней известной поверхностью Σ . Такая замена не может заметно повлиять на искомое решение вследствие близости поверхностей S и Σ . После этой замены краевое условие запишем так

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \Big|_{\Sigma} = -\Delta g + \frac{2(W_0 - U_0)}{\rho}. \quad (3.24)$$

Так как сжатие Земли не учитывается, краевая поверхность Σ в (3.24) — это поверхность, получившаяся в результате откладывания от сферы радиуса R_0 нормальных высот H' (рис. 3.4).

Решение задачи с условием (3.24) осложнено тем обстоятельством, что в него входит производная $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ искомой функции T по направлению радиуса-вектора ρ , а не по нормали n к краевой поверхности Σ (см. рис. 3.4). Эти направления могут существенно различаться в тех частях по-

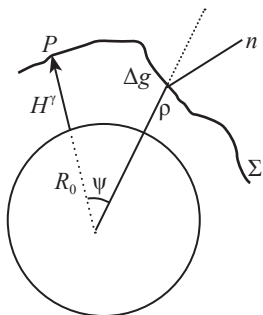


Рис. 3.4. Краевая поверхность в сферическом приближении

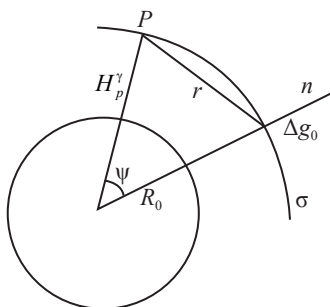


Рис. 3.5. Краевая поверхность в нулевом приближении

верхности Σ , где нормальные высоты быстро изменяются и краевая поверхность имеет значительные наклоны относительно радиуса-вектора. В нулевом приближении краевую поверхность сглаживают, полагая нормальную высоту постоянной и равной высоте H_p^γ в той точке, где определяется функция T , $H^r = H_p^\gamma$. Тогда радиусы векторы всех точек краевой поверхности будут одинаковы $\rho = R_0 + H_p^\gamma$, а краевая поверхность станет сферой σ радиуса $R = R_0 + H_p^\gamma$ (рис. 3.5).

Теперь для краевой поверхности направление радиуса-вектора и нормали к ней совпадают, а краевое условие принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \Big|_{\rho=R} = -\Delta g + \frac{2(W_0 - U_0)}{R} \quad (3.25)$$

или, если обозначить правую часть через Δg_0 ,

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \Big|_{\rho=R} = -\Delta g_0. \quad (3.26)$$

Это и есть краевое условие в нулевом приближении. Оно отличается от точного краевого условия тем, что в нем не учтено сжатие Земли и наклоны физической поверхности.

3.6. Понятие об определении аномального потенциала в нулевом приближении

Краевая задача с условием (3.26) является третьей краевой задачей для сферы. Ее решение получено в прил. 1. Заменив в формуле (П22) прил. 1 функцию $f(\vartheta, \lambda)$ на $-\Delta g_0$, получим

$$T = \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta g_0 [S(\psi) - 1] d\sigma. \quad (3.27)$$

Здесь для сокращения записи опущены аргументы у потенциала T . В прил. 1 отмечено, что задача с краевым условием (3.26) имеет особенность и функция Δg_0 не может содержать сферической функции первой

степени (формулы (П10)–(П11) прил. 1). Поэтому решение (3.27) также не содержит сферической функции первой степени. Так как эта функция связана с координатами центра масс, можно сказать, что в решении (3.27) начало координат не определено и решение получено с точностью до параллельного переноса.

Если ввести в (3.27) выражение Δg_0 ,

$$\Delta g_0 = \Delta g - \frac{2(W_0 - U_0)}{R}, \quad (3.28)$$

$$\text{то } T = 2(W_0 - U_0) - \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta g + \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma.$$

Интеграл $\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} \Delta g d\sigma$ определяет осредненную по поверхности сферы σ смешанную аномалию силы тяжести $\Delta g_{\text{ср}}$. Используя это обозначение, для аномального потенциала получаем

$$T = 2(W_0 - U_0) - R\Delta g_{\text{ср}} + \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (3.29)$$

Как видим, для получения потенциала T помимо смешанной аномалии силы тяжести Δg нужно знать постоянную $2(W_0 - U_0) - R\Delta g_{\text{ср}}$. Эта постоянная связана с разностью ΔM масс действительной и нормальной Земли

$$RG\Delta M = 2(W_0 - U_0) - R\Delta g_{\text{ср}}.$$

Если массы действительной и нормальной Земли совпадают и $\Delta M = 0$, то (3.27) и (3.29) получают вид

$$T = \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (3.30)$$

Обе формулы (3.27) и (3.30) называют *формулой Стокса*. Формула (3.30) получена Стоксом в 1849 г., а в форме (3.27) формула Стокса предложена В.В. Броваром (1918–1999) в 1958 г.

Для нахождения аномалии высоты подставим решение (3.29) в (3.13). В результате получим

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{\gamma} - \frac{R\Delta g_{\text{ср}}}{\gamma} + \frac{1}{4\pi R\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (3.31)$$

Последний член правой части формулы (3.31) называют *гравиметрической аномалией высоты*

$$\zeta^{\text{ГР}} = \frac{1}{4\pi R\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (3.32)$$

Формулы (3.27), (3.30) и (3.31) были бы точными, если бы гипсометрическая поверхность совпала с уровенной поверхностью нормального поля, а физическая поверхность с уровенной поверхностью $W=W_p$ (см. рис. 3.5), сжатие обеих поверхностей отсутствовало и аномалии Δg были бы известны во всех точках поверхности $W=W_p$. Напомним, что во всех этих формулах отсутствует сферическая функция первой степени.

В формулах (3.27) и (3.29)–(3.31) стоящая под знаком интеграла функция Стокса $S(\psi)$ имеет вид

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - \cos \psi \left[5 + 3 \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right], \quad (3.33)$$

где ψ — угловое расстояние между фиксированной точкой P , в которой вычисляют потенциал T , и текущей точкой, в которой должна быть известна аномалия силы тяжести Δg (см. рис. 3.4). Функция Стокса показана на рис. 3.6.

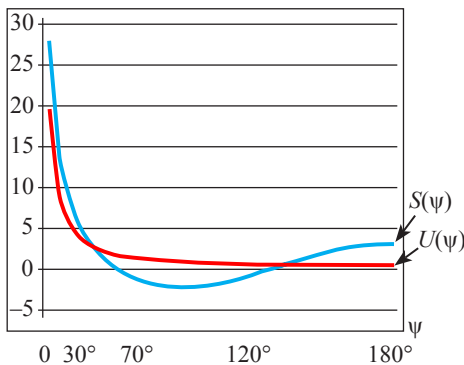


Рис. 3.6. Функции Стокса и Неймана

Для вычисления потенциала T аномалии Δg должны быть известны во всех точках сферы σ , по которой ведется интегрирование, т.е. во всех точках поверхности Земли. На практике часто оценивают влияние только аномалий Δg силы тяжести в ближайших окрестностях вычислительной точки P . В этом случае сферу интегрирования можно заменить плоскостью, а угловое расстояние ψ — линейным расстоянием r (см. рис. 3.5).

3.7. Задача Стокса и задача Молоденского

Формула (3.32) получена Стоксом (1819–1903) как формула, определяющая высоту геоида над эллипсоидом.

Стокс исследовал «связь между значениями силы тяжести и неправильностями формы той уровенной поверхности, которая представляет собою уровень моря» и доказал, что если известны изменения силы тяжести на уровенной поверхности, то форма уровенной поверхности

определена. Это утверждение основано на установленной еще Клеро зависимости между формой уровенной поверхности и законом изменения силы тяжести на этой поверхности. Знаменитая в геодезии теорема Клеро гласит: закон изменения силы тяжести и форма уровенной поверхности связаны между собой и «вопрос о фигуре Земли есть вопрос о ее силе тяжести».

Исследования Стокса (1849) относятся ко времени, когда в геодезии только что утвердилось понятие геоида, и поэтому Стокс поставил задачу определения поверхности Земли как задачу определения формы *одной единственной уровенной поверхности — геоида*.

Задача Стокса состоит в следующем: на внешней уровенной поверхности $W=W_0$ известны значения силы тяжести g_0 . Найти высоты ζ^g этой поверхности над уровенным сфероидом, на котором вычислена сила тяжести γ_0 . Полученное Стоксом решение этой задачи было первым теоретическим определением поверхности геоида.

Решение Стокса предполагает, что геоид (уровень моря) является внешней уровенной поверхностью, а сила тяжести g_0 измерена на геоиде. Однако в действительности эти условия не выполняются, так как над уровнем моря возвышаются материки и острова и измерения силы тяжести внутри Земли невозможны. Многолетние усилия многих исследователей по преодолению этих препятствий к практическому применению решения Стокса для определения геоида оказались бесплодными.

Молоденский разрубил гордиев узел проблем, связанных с невозможностью определения геоида по измерениям на поверхности Земли и исключил геоид как уровень моря из геодезии. Согласно Молоденскому, основной задачей геодезии является *изучение физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли*.

Задача Стокса состоит в определении формы уровенной поверхности по измерениям силы тяжести на этой поверхности, а задача Молоденского — в определении гравитационного поля и физической поверхности Земли по измерениям силы тяжести на физической (неуровенной) поверхности. Задача Молоденского значительно шире задачи Стокса. По Молоденскому определяется форма не *одной единственной* уровенной поверхности, как это было у Стокса, а внешнее гравитационное поле, т.е. форма *всех* уровенных поверхностей в их совокупности и физическая поверхность Земли, которая *не является уровенной*.

В свете теории Молоденского решение Стокса приобрело новый смысл. Теперь полученную Стоксом формулу рассматривают не как формулу, определяющую поверхность геоида, а как формулу, определяющую аномалию высоты в любой точке поверхности Земли или внешнего пространства.

Поясним смысл решения Стокса (рис. 3.7). В постановке Стокса задача заключалась в определении поверхности $W=W_0$ геоида по измерениям силы тяжести g_0 во всех его точках. Причем над геоидом не должно быть притягивающих масс, но его поверхность и сила тяжести g_0 должны быть такими же, как у действительной Земли. В настоящее время формулу Стокса понимают как формулу, дающую аномалию высоты в точке P физической поверхности Земли по значениям g' силы тяжести во всех точках урениной поверхности $W=W_p$, проходящей через точку P . В равнинном районе физическая поверхность S Земли близка к урениной поверхности и значения g' силы тяжести на урениной поверхности близки к значениям g силы тяжести, измеряемой на поверхности Земли и их отличие можно не учитывать. Поэтому формула Стокса, в которой использованы измеренные значения g , в равнинных районах, а также на поверхности океана дает величину аномалии высоты с достаточной для практики точностью. Но в условиях холмистой и горной местности уже нельзя отождествлять поверхность Земли с урениной поверхностью и считать равными значения величин g и g' . В этом случае решение Стокса не дает приемлемой точности. Его можно использовать только как начальное, или, как говорят, нулевое приближение к решению Молоденского.

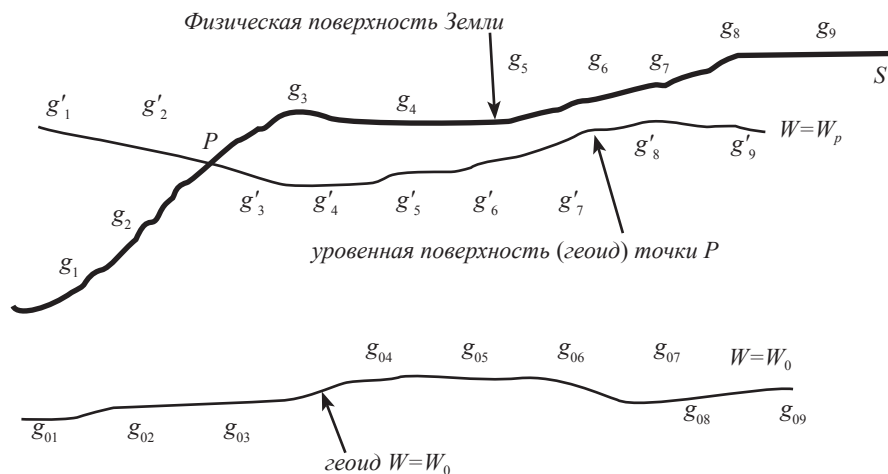


Рис. 3.7. Современная интерпретация задачи и решения Стокса:

g — сила тяжести на физической поверхности Земли;
 g', g_0 — то же на урениной поверхности точки P и геоиде $W=W_0$ соответственно

3.8. Определение аномального потенциала с использованием чистых аномалий силы тяжести (решение задачи Молоденского во втором приближении)

После определения аномального потенциала поверхность Земли, т.е. геодезические координаты, будут известны (см. (3.14)). Поэтому теперь можно вычислить нормальную силу тяжести γ_p и использовать для нахождения аномального потенциала краевое условие (3.15).

Задача определения аномального потенциала в этом случае также решается приближениями. В нулевом приближении опять считают уровенную поверхность нормального поля сферической, а физическую поверхность Земли — уровенной. Тогда в нулевом приближении краевое условие (3.15) примет вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = -(g_p - \gamma_p). \quad (3.34)$$

Это краевое условие совпадает с краевым условием (П7) прил. 1. Заменяя в формуле (П17) прил. 1 функцию $f_2(\vartheta, \lambda)$ на $-(g_p - \gamma_p)$, для аномального потенциала согласно (П18) напомним

$$T = \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) U(\psi) d\sigma; \quad (3.35)$$

где $U(\psi)$ называют иногда функцией Неймана (1832–1925) (не путать функцию $U(\psi)$ с нормальным потенциалом U !) (см. рис 3.6). В явном виде функция $U(\psi)$ выглядит так

$$U(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - \ln \left(1 + \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} \right). \quad (3.36)$$

Чистую аномалию высоты $\zeta_{\pm}$ можно найти согласно (2.3), подставив в нее решение (3.34). Тогда

$$\zeta_{\pm} = \frac{1}{4\pi R \gamma} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) U(\psi) d\sigma. \quad (3.37)$$

В настоящее время геодезические координаты точек поверхности Земли можно получить по спутниковым данным. Поэтому в любой точке P поверхности Земли можно вычислить нормальный потенциал U_p , нормальную силу тяжести γ_p и чистую аномалию силы тяжести $g_p - \gamma_p$. Таким образом, появилась возможность определения аномального потенциала непосредственно для второго приближения Молоденского. Схема задачи Молоденского и ее решения дана на рис. 3.8.

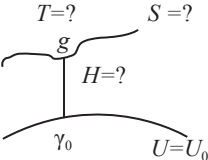
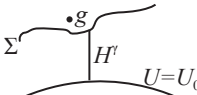
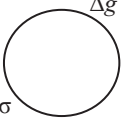
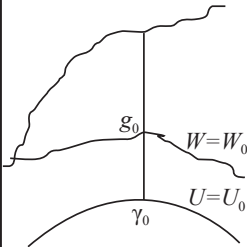
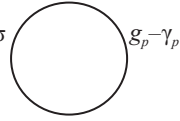
Задача Молоденского			Задача Стокса
Исходные данные: Известна ω .	Первое приближение	Нулевое приближение к первому приближению	$\alpha=0, H'=0$ $W_0=U_0$
Измерены $\varphi, \lambda, W_0-W_p, g$ Найти поверхность S Земли и внешний потенциал W или T  <i>Краевого условия нет</i>	$\tilde{T}=0 \Rightarrow$ $\tilde{B}=\varphi, \tilde{L}=\lambda, \tilde{H}=H'$  Краевое условие (3.24) Решение в виде ряда $T=T_0+T_1+T_2+\dots$	$\alpha=0, H'=\text{const},$ $W_0=U_0$ $\tilde{T}=T_0$  Краевое условие (3.26) Решение (3.30)	 Краевое условие $\left. \frac{\partial T_c}{\partial \rho} + \frac{T_c}{\rho} \right _{\rho=R} = -(g_0 - \gamma_0)$ Решение $T_c = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} (g_0 - \gamma_0) S(\psi) d\sigma$ g_0 — неизвестно
	Второе приближение	Нулевое приближение ко второму приближению	
	Поверхность S известна: $B=\tilde{B}+\zeta,$ $L=\tilde{L}+\eta \sec \varphi,$ $H=H'+\zeta$ или Измерены $X, Y, Z,$ $B=B(X, Y, Z),$ $L=L(X, Y, Z),$ $H=H(X, Y, Z),$ Краевое условие (3.15) Решение в виде ряда $T=T_0+T_1+T_2+\dots$	$\alpha=0, H=\text{const},$ $\tilde{T}=T_0$  Краевое условие (3.34) Решение (3.35)	

Рис. 3.8. Схема решения геодезической краевой задачи

3.9. Сравнение решений задачи Молоденского, полученных по смешанным и чистым аномалиям силы тяжести

Сопоставим решения (3.27) и (3.35). Обе эти формулы определяют одну и ту же величину — аномальный потенциал на поверхности Земли. Поэтому, если использовано в обоих случаях одно и то же нормальное поле, результат, полученный по (3.27) и (3.35), совпадет. Однако при использовании смешанных аномалий силы тяжести аномалия высоты связана с аномальным потенциалом формулой (3.13), а при использовании чистых аномалий силы тяжести — формулой (2.3). Это происходит потому, что аномалии высоты в этих двух случаях различны. Чистая аномалия высоты определяет расстояние от точки P поверхности Земли до точки, в которой нормальный потенциал равен действительному (см. разд. 2.1). Аномалия высоты дает расстояние от той же точки поверхности Земли до той точки, в которой нормальный потенциал отличается от действительного на постоянную $W_0 - U_0$.

Сопоставим формулы (3.31) и (3.37).

Выделим в функции Неймана ((П17) прил. 1)

$$U(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi)$$

члены с $n=0$ и $n=1$. Так как $P_0(\cos \psi) = 1$, $P_1(\cos \psi) = \cos \psi$, для суммы $\Delta U(\psi)$ этих членов находим $\Delta U(\psi) = 1 + \frac{3}{2} \cos \psi$.

Запишем решение (3.37) в виде

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{ч}} = & \frac{1}{4\pi R\gamma} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) d\sigma + \frac{1}{4\pi R\gamma} \frac{3}{2} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) \cos \psi d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi R\gamma} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) [U(\psi) - \Delta U(\psi)] d\sigma. \end{aligned}$$

Первый интеграл правой части этого выражения связан с разностью масс реальной и нормальной Земли:

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) d\sigma = R(g_p - \gamma_p)_{\text{ср}} = \frac{G\Delta M}{R},$$

где $(g_p - \gamma_p)_{\text{ср}}$ — среднее значение чистой аномалии силы тяжести.

Второй интеграл содержит координаты центра масс Земли. Если масса действительной и нормальной Земли совпадают и начало координат находится в центре масс Земли, то оба эти интеграла обращаются в нуль и чистая аномалия высоты становится *гравиметрической аномалией вы-*

соты, связанной с общим земным эллипсоидом

$$\zeta_{\text{ч}} = \zeta^{\text{гп}} = \frac{1}{4\pi R\gamma} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) [U(\psi) - \Delta U(\psi)] d\sigma$$

и совпадет с аномалией высоты, вычисленной по смешанным аномалиям силы тяжести по формуле (3.32).

Геодезическую высоту над общим земным эллипсоидом можно получить, добавив к нормальной высоте гравиметрическую аномалию высоты, найденную тем или иным способом. Кроме того, геодезическую высоту ныне получают по спутниковым измерениям, перевычислением геодезических прямоугольных координат в эллипсоидальные для выбранного эллипсоида. Однако следует иметь в виду, что при использовании спутниковых измерений уже нет необходимости связывать начало счета нормальных высот с потенциалом на уровне моря. В этом случае нормальную высоту получают как разность геодезической высоты и аномалии высоты

$$H^{\gamma} = H - \zeta_{\text{ч}} = H - \frac{1}{4\pi R\gamma} \int_{\sigma} (g_p - \gamma_p) [U(\psi) - \Delta U(\psi)] d\sigma.$$

Нормальная высота полностью определена выбором эллипсоида и потенциалом реальной Земли и освобождена от использования геоида. Она определяется по разности $U_0 - W_p$ потенциалов на отсчетном эллипсоиде и на физической поверхности Земли

$$H^{\gamma} = \frac{U_0 - W_p}{\gamma_m}. \quad (3.38)$$

Нормальные высоты, введенные в 1945 г. М.С. Молоденским как вспомогательные высоты, необходимые для приближенного определения физической поверхности Земли, стали в последующем одним из основных понятий геодезии и широко применяются в геодезической практике. Напомним, что согласно Молоденскому нормальной высотой является высота над эллипсоидом в нормальном поле такой точки, для которой разность нормального потенциала относительно эллипсоида равна геопотенциальному числу точки поверхности Земли. Нормальные высоты не зависят практически от выбора эллипсоида и определяются по измерениям, выполняемым на физической поверхности Земли (3.8). Однако они связаны с выбором начальной точки, от которой выполняется геометрическое нивелирование и ведется счет геопотенциальных чисел.

По разностям нормальной высоты (3.38) и (3.8) находят разность потенциалов в исходных пунктах различных нивелирных сетей. Раз-

ности геодезических высот, полученных по наземным измерениям и спутниковым данным, используют для уточнения полуоси отсчетного эллипсоида. Нормальная высота и аномалия высоты, соответствующие двум способам их определения, показаны на рис. 3.9.

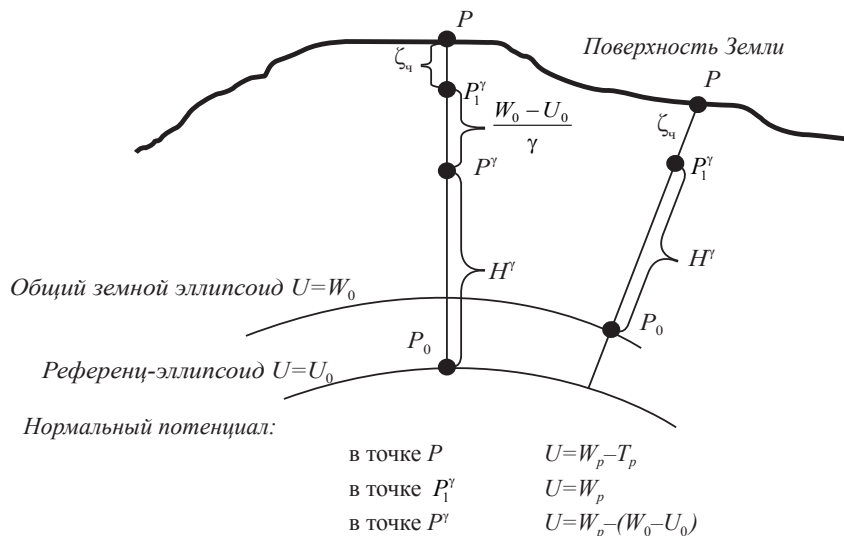


Рис. 3.9. Аномалия высоты и геодезическая высота для общего земного и референц-эллипсоидов

Использование спутниковых измерений позволяет получать нормальные высоты H' , не выполняя геометрического нивелирования:

$$H' = H - \zeta. \quad (3.39)$$

Препятствием этому является недостаточная точность спутниковых определений геодезической высоты и, особенно, гравиметрической аномалии высоты. В результате нормальная высота, найденная с использованием спутниковых данных, существенно уступает высоте, найденной из высокоточного нивелирования, которое является одним из наиболее точных видов геодезических работ.

3.10. Определение аномального потенциала для плоской отсчетной поверхности

Краевое условие (3.25)–(3.26) для плоскости, когда радиус R отсчетной сферы неограниченно возрастает, принимает вид $\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\Delta g$

или, если написать смешанную аномалию силы тяжести в развернутом виде (3.21),

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -(g_p - \gamma_{py}). \quad (3.40)$$

В двух последних равенствах вместо переменного радиуса вектора ρ использована переменная z — высота над отсчетной плоскостью $z=0$, к которой относится краевое условие (3.40).

Напишем решение краевой задачи для плоскости с условием (3.40). Свяжем линейное и угловое расстояния (рис. 3.10), согласно которому

$$\sin \frac{\Psi}{2} = \frac{r}{2R}, \quad \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} = \frac{2R}{r}. \quad (3.41)$$

Для малых значений Ψ и r , при которых Землю можно считать плоской, функцию Стокса можно написать в виде

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0} S(\Psi) = \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} = \frac{2R}{r}. \quad (3.42)$$

Подставив в (3.30) выражение функции Стокса (3.42), получим формулу Стокса для плоской отсчетной поверхности

$$T = \frac{1}{2\pi_\sigma} \int \frac{g_p - \gamma_{py}}{r} d\sigma. \quad (3.43)$$

В формуле (3.43) σ — плоскость $z=0$. Выразим элемент плоскости в

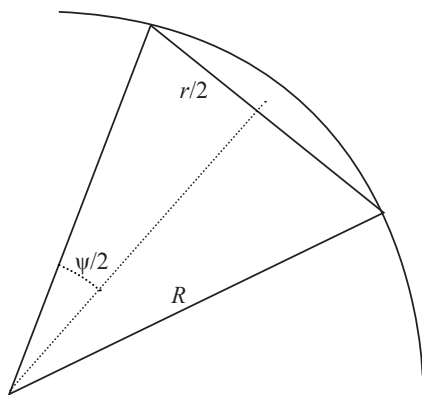


Рис. 3.10. Связь углового и линейного расстояний

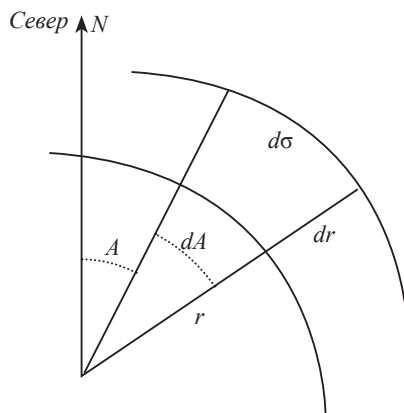


Рис. 3.11. Полярные координаты на плоскости и элемент поверхности

полярных координатах (r, A) A — азимут направления из фиксированной вычислительной точки в текущую (рис.3.11);

$$d\sigma = r dr dA \quad (3.44)$$

и формула Стокса для плоской Земли принимает вид

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{r_k} \int_{A=0}^{2\pi} (g_p - \gamma_{p'}) dr dA, \quad (3.45)$$

где r_k — радиус области, в которой выполняется интегрирование.

Получим теперь формулу для плоской отсчетной поверхности, соответствующую формуле Неймана (3.36). Краевое условие (3.33) в этом случае примет вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -(g_p - \gamma_p). \quad (3.46)$$

Полагая снова $\psi \rightarrow 0$, для функции Неймана получаем

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} U(\psi) = \operatorname{cosec} \psi / 2$$

и, переходя к линейному расстоянию r , находим

$$U(r) = \frac{2R}{r} \quad (3.47)$$

и для аномального потенциала получаем

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{r_k} \int_{A=0}^{2\pi} (g_p - \gamma_{p'}) dr dA. \quad (3.48)$$

Для плоской отсчетной поверхности функции $S(\psi)$ Стокса и $U(\psi)$ Неймана совпадают, поэтому формально совпадают и выражения (3.45) и (3.48) для аномального потенциала. Принципиальное отличие этих формул в том, что они являются решениями задач с *разными краевыми условиями*: формула (3.45) решает задачу с условием (3.44), в правой части которого стоит смешанная аномалия силы тяжести, а формула (3.48) задачу с условием (3.46), содержащем чистые аномалии силы тяжести. Более логичным являются краевое условие (3.46) и решение (3.48), потому что производная аномального потенциала по нормали к отсчетной уровенной поверхности является чистой аномалией силы тяжести, см. разд. 2.2 и формулу (2.7). Результат (3.45) объясняется тем, что нормальные уровенные поверхности будут параллельными плоскостями только для однородного поля, в котором сила тяжести постоянна. В этом случае нормальная сила тяжести в точках P и P' будет одна и та

же и чистая аномалия не будет отличаться от смешенной. Но свободный член в краевом условии (3.40) для плоскости оставлен точно таким же, как и для сферической Земли. Это и привело к внутренней противоречивости решения (3.45) и его отличию от решения (3.48).

Формулу Стокса для плоской отсчетной поверхности следует понимать не как решение краевой задачи с граничным условием (3.40), а как формулу для приближенного вычисления интеграла (3.30), при котором сферическая поверхность интегрирования заменяется плоскостью. При малых значениях расстояния ψ эта замена не вызовет заметной ошибки в потенциале T и аномалии высоты.

3.11. Определение аномалии высоты и составляющих уклонения отвеса для плоской отсчетной поверхности

После нахождения аномального потенциала аномалию высоты и составляющие уклонения отвеса получают по формулам (3.13) и (2.6). Подставив в (3.13) потенциал (3.29), найдем

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{\gamma} + \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (3.49)$$

Для плоской Земли, используя потенциал в форме (3.45), получим

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{\gamma} + \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{r=0}^{r_k} \int_{A=0}^{2\pi} (g_p - \gamma_{p\gamma}) dr dA. \quad (3.50)$$

Обратим внимание на формулы (3.40), (3.43) и (3.50). В краевое условие (3.40) разность $W_0 - U_0$ не входит, поэтому ее нет и в решении (3.43). Однако аномалия высоты, согласно (3.13), содержит разность потенциалов на уровне моря и уровне эллипсоиде. Поэтому разность $W_0 - U_0$ появилась в выражении (3.50) для аномалии высоты. Если же положить потенциал на уровне моря равным потенциалу на отсчетном эллипсоиде, т.е. считать $W_0 - U_0 = 0$, то для плоской Земли получим

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{r=0}^{r_k} \int_{A=0}^{2\pi} (g_p - \gamma_{p\gamma}) dr dA. \quad (3.51)$$

Формулы (3.50), (3.51) также называют формулами Стокса, поскольку в них входит тот же интеграл, что и в формулы для аномального потенциала.

Формулы для составляющих уклонений отвеса получим только для плоской отсчетной поверхности. Согласно (2.6) для их нахождения нужно дифференцировать выражение (3.43) для потенциала T по направлениям x и y , причем ось x направлена вдоль меридиана на север, а ось y

на восток. Но в формулу (3.43) переменные x и y в явном виде не входят. Напишем поэтому согласно рис. 3.12 зависимости между полярными r , A и прямоугольными x и y координатами

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad \Delta x = r \cos A, \quad \Delta y = r \sin A, \quad \Delta x = x_i - x_p, \quad \Delta y = y_i - y_p. \quad (3.52)$$

В формулах (2.6) дифференцирование выполняется по координатам фиксированной точки P , поэтому

$$\zeta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x_p} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_p}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y_p} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y_p}.$$

Но согласно (3.52) $\frac{\partial r}{\partial x_p} = -\cos A$, $\frac{\partial r}{\partial y_p} = -\sin A$, поэтому для составляющих уклонения отвеса находим

$$\xi = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_{r=0}^{r_k} \int_{A=0}^{2\pi} \frac{g_P - \gamma_{P'}}{r} \cos A dr dA, \quad \eta = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_{r=0}^{r_k} \int_{A=0}^{2\pi} \frac{g_P - \gamma_{P'}}{r} \sin A dr dA. \quad (3.53)$$

Формулы (3.53) называются формулами Венинг-Мейнеса (1887–1966).

Формулы (3.53) имеют особенность: расстояние r обращается в нуль если текущая точка P_i , к которой относится аномалия силы тяжести Δg , совпадает с фиксированной точкой P , в которой вычисляют уклонения отвеса. Это означает, что подинтегральное выражение неограниченно возрастает. Эту особенность формул (3.53) обязательно учитывают при разработке методики вычисления уклонения отвеса.

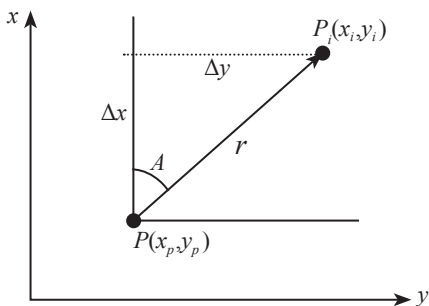


Рис. 3.12. Связь плоских прямоугольных и полярных координат на плоскости $z=0$ (ось z перпендикулярна к плоскости чертежа)

ГЛАВА 4. УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОДЕЗИИ

4.1. Геодезические измерения в однородном и неоднородном поле

Инженерно-геодезические измерения, проводимые для обеспечения строительства и эксплуатации различных объектов, обычно считают выполненными в однородном поле плоской Земли. Напомним, что однородным полем называют поле постоянной по величине и направлению силы. Если сила γ постоянна,

$$\gamma = \text{const}, \quad (4.1)$$

ее производные равны нулю. Но производные силы являются вторыми производными потенциала, которые определяют кривизну силовой линии и уровенной поверхности. Поэтому кривизна уровенных поверхностей и силовых линий однородного поля равны нулю, и уровенные поверхности однородного поля будут параллельными плоскостями, а силовые линии — перпендикулярными к ним прямыми (рис. 4.1).

Предположим, что измерения выполнены в однородном поле. Выберем какую-либо точку O за начало прямоугольной системы координат

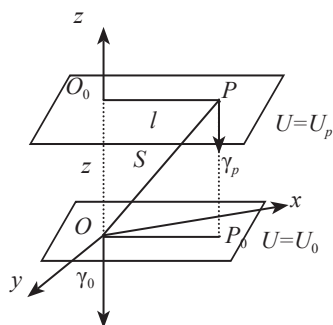


Рис. 4.1. Однородное поле

$Oxyz$, а за одну из координатных линий примем направление силы тяжести $g_0 = \gamma_0$ в этой точке, т.е. направление отвеса. Положение точки P можно задать или ее прямоугольными x, y, z или цилиндрическими l, A, z координатами, где z — расстояние между уровенными поверхностями, проходящими через точки O и P , или высота точки P ; l — расстояние между проекциями точек O и P на любую уровенную поверхность; A — азимут линии $OP = S$ (на рис. 4.1 азимут A не показан). В однородном поле

уровенные поверхности и силовые линии параллельны, поэтому справедливы равенства

$$\gamma_0 = \gamma_p \Rightarrow OP_0 = O_0P = l, \quad P_0P = OO_0 = z, \quad (4.2)$$

а измерения в точке P выполняются в той же самой системе координат, что и в точке O .

Обработка наблюдений в такой системе координат не требует предварительных редукций и не вызывает затруднений. Поле силы тяжести Земли не однородно (рис.4.2). В реальном поле силовые линии — пространственные кривые, касательные к ним отвесные линии не параллельны. Уровенные поверхности имеют сложную форму, их кривизна изменяется при перемещении от одной точки к другой. Расстояние между уровнями поверхностями не постоянно. Поэтому для двух точек O и P расстояния между их проекциями на уровенные поверхности $W=W_p$ и $W=W_0$, проходящие через эти точки, не равны друг другу, а расстояния между этими поверхностями в точках P и O не совпадают

$$g_p \neq g_0 \Rightarrow PO_0 \neq P_0O, \quad PP_0 \neq O_0O. \quad (4.3)$$

Если размер области, в которой выполнены инженерно-геодезические работы, мал, и все измерения выполнены при постановке инструмента в одной точке, можно считать поле однородным и не вводить никакие поправки в измерения. Но если измерения выполнены даже из двух точек, нужно учитывать взаимное положение инструментов, устанавливаемых в этих точках. При небольших расстояниях между измерительными точками поправки, необходимые для редуцирования результатов измерений в единую систему, невелики и во многих случаях их можно не учитывать. Однако в каждом конкретном случае нужно выполнить оценку этих поправок и сделать заключение о необходимости их введения с учетом точности выполненных измерений и площади съемки.

Целесообразен такой путь решения задачи о необходимости учета неоднородности поля:

- 1) выбрать нормальный потенциал U ;
- 2) найти аномальный потенциал $T=W-U$;
- 3) оценить величину поправок в измерения, соответствующие аномальному потенциалу T ;
- 4) сравнить величины поправок с

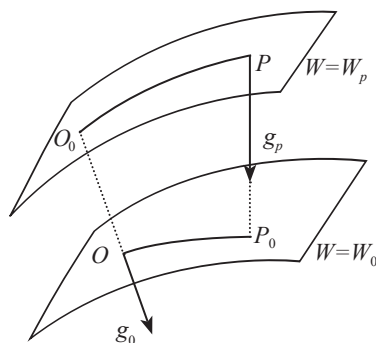


Рис. 4.2. Неоднородное поле

точностью измерений. Если поправки значительно меньше ошибок измерений, их можно не учитывать и считать измерения выполненными в использованном нормальном поле. Если было выбрано однородное нормальное поле, то можно считать измерения выполненными в однородном поле;

5) если поправки в измерения сопоставимы по величине или даже превосходят ошибки измерения, аномальный потенциал нужно учитывать. Для этого можно или ввести необходимые поправки, или выбрать новое нормальное поле U_1 и получить новый аномальный потенциал $T_1 = W - U_1$. Далее для этого аномального потенциала снова оценить поправки, сопоставить величины поправок с точностью измерений и сделать вывод о необходимости учета поправок или о возможности использования нормального поля U_1 вместо реального.

Задача редуцирования результатов измерений рассматривается в курсе высшей геодезии, поэтому далее приводятся только краткие пояснения, необходимые для удобства дальнейшего изложения.

4.2. Редуцирование результатов измерений

В настоящее время в геодезии используют результаты измерений, полученных двумя принципиально различными путями. В классических наземных линейных и угловых измерениях, выполняемых с помощью ориентируемых по уровням инструментов, измерения в каждой точке выполняют в своей собственной топоцентрической горизонтной системе координат, определяемой направлением силы тяжести в этой точке. Для совместной обработки результатов таких измерений необходимо установить связь этих систем координат, т.е. изучить гравитационное поле. Спутниковые технологии позволяют получать результаты в единой экваториальной прямоугольной системе координат. В этом случае редуцирование измерений в единую систему не требуется, однако для совместной обработки результатов наземных и спутниковых измерений необходимо установить связи топоцентрических горизонтных и экваториальной систем координат.

Несмотря на широкое внедрение спутниковых измерений в практику геодезических работ, полностью отказаться от измерений на поверхности Земли традиционными методами невозможно. Наземные измерения, по сравнению со спутниковыми, обладают большей гибкостью; их можно выполнять не только в открытой местности, но и внутри помещений, под Землей в шахтах и тоннелях. Спутниковые приемники всегда можно установить только в реально существующем пункте, который может не совпадать с пунктом геодезической сети. Если же при выносе проекта

в натуру какой-либо линии или поверхности ее координаты заданы только аналитически, то в точках этой линии в принципе невозможно установить какую-либо аппаратуру.

Различие наземных и спутниковых измерений при определении высоты. Спутниковые измерения не содержат информации о гравитационном поле и не могут дать связанную с работой в поле силы тяжести разность высот. Однако именно такие высоты необходимы для решения большинства практических задач. Эти высоты получают из геометрического нивелирования и измерений силы тяжести. В связи с этим в инженерно-геодезических сетях наземные измерения играют до настоящего времени большую роль.

Рассмотрим принцип редуцирования результатов измерений. На рис. 4.3, *а* показано сечение поверхности Земли вертикальной плоскостью, проходящей через отвесную линию PP_0 и точку P_1 . В точке P измерены расстояние s до точки P_1 , угол наклона α отрезка s относительно уровенной поверхности или его зенитное расстояние $90^\circ - \alpha$ относительно отвесной линии и превышение Δh .

Установим зависимости между измеренными величинами и их аналогами в однородном поле.

В однородном поле положение точки P_1 относительно точки P определено линейным расстоянием s , зенитным расстоянием Z , отсчитываемым от координатной линии Pz и азимутом A или расстоянием l и разностью Δz местных геодезических высот и азимутом A ; в однородном поле местные геодезические высоты отсчитывают от плоскости, а не от поверхности эллипсоида, как это было в геодезической системе координат.

Угол ϑ между координатной линией и отвесной линией в точке P является составляющей местного уклонения отвеса в плоскости черте-

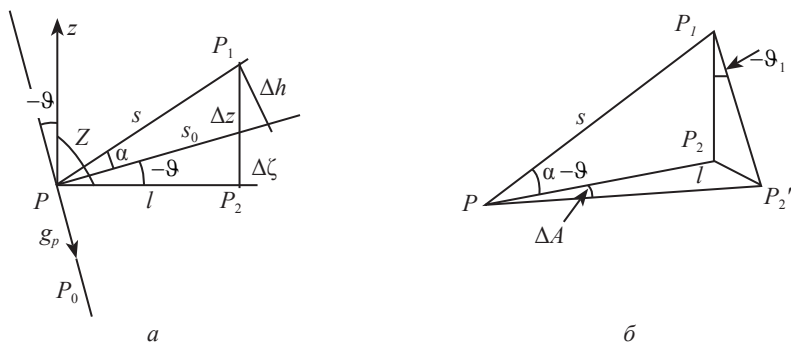


Рис. 4.3. К связи линейных и угловых величин в однородном (*а*) и неоднородном (*б*) поле

жа. Угол наклона уровенной поверхности к плоскости $z=z_p$ также равен уклонению отвеса. На рис. 4.3 уклонение отвеса таково, что превышение $\Delta\zeta$ уровенной поверхности положительно. В этом случае уклонение отвеса считают отрицательным. Из прямоугольного треугольника PP_1P_2 напомним

$$l=s \cos(\alpha - \vartheta), \quad \Delta z=s \sin(\alpha - \vartheta),$$

эти равенства можно переписать в виде

$$l=s \cos \alpha \cos \vartheta + s \sin \alpha \sin \vartheta, \quad \Delta z=s \sin \alpha \cos \vartheta - s \cos \alpha \sin \vartheta.$$

Но, как видно из рис. 4.3, а, произведение $s \cos \alpha$ является проекцией s_0 отрезка s на уровенную поверхность, а произведение $s \sin \alpha$ — превышением Δh . Направление оси Pz всегда выбирают близким к отвесной линии, поэтому угол ϑ мал и обычно полагают $\cos \vartheta=1$, $\sin \vartheta=\vartheta$. Тогда для связи измеренных расстояний и превышений с соответствующими величинами в однородном поле находим

$$l=s_0 + \vartheta \Delta h, \quad (4.4)$$

$$\Delta z=\Delta h - \vartheta s. \quad (4.5)$$

Связь измеренного зенитного расстояния $Z^{изм}$ и зенитного расстояния Z в однородном поле вытекает непосредственно из рис. 4.3, а и имеет вид

$$Z=Z^{изм} + \vartheta. \quad (4.6)$$

Установим, наконец, связь горизонтальных направлений, опираясь на рис. 4.3, б. При измерениях горизонтальных углов вертикальную ось теодолита совмещают с отвесной линией и измеряют углы между направлениями PP_2' на проекции наблюдаемых предметов на плоскость лимба. Эти направления отличаются на угол ΔA от направлений PP_2 на проекции по координатной линии. Несовпадение точек P_2P_2' обусловлены составляющей ϑ_1 уклонения отвеса в плоскости, перпендикулярной наблюдаемому направлению. Из прямоугольного треугольника $P_1P_2P_2'$ длина отрезка P_2P_2' равна $\Delta z \operatorname{tg}(-\vartheta_1)$. Из треугольника PP_2P_2' находим $\operatorname{tg} \Delta A=P_2P_2'/PP_2=\Delta z \operatorname{tg}(-\vartheta_1)/PP_2$, но из треугольника PP_1P_2 $\Delta z/PP_2=\operatorname{ctg} Z$, поэтому $\operatorname{tg} \Delta A=\operatorname{tg}(-\vartheta_1) \operatorname{ctg} Z$, или, если ϑ мало,

$$\Delta A=-\vartheta_1 \operatorname{ctg} Z. \quad (4.7)$$

Формулы (4.4)–(4.7) показывают, что для редуцирования результатов линейных и угловых измерений нужно знать составляющие уклонения отвеса.

4.3. Представление гравитационного поля в ограниченной области

Для представления реального потенциала в пределах объема, занятого инженерно-геодезическими измерениями, используем выражение

$$W = W_0 + \frac{\partial W}{\partial l} l + \frac{\partial W}{\partial z} Z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial l^2} l^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} Z^2 + \dots$$

или, применяя принятое в гравиметрии обозначение для производных потенциала,

$$W = W_0 + W_l l + W_z z + \frac{1}{2} W_{ll} l^2 + \frac{1}{2} W_{zz} z^2 + W_{lz} l z + \dots \quad (4.8)$$

Здесь W_0 — потенциал силы тяжести в исходном пункте O рассматриваемой сети; W — потенциал в ее рядовом пункте P , находящемся в азимуте A на расстоянии s от исходного, производные вычислены для исходного пункта; l, z, A — координаты (рис. 4.4).

Производные W_l и W_z являются составляющими силы тяжести по направлениям l и z . Производная W_{ll} связана с кривизной $\frac{1}{\rho_{\text{уп}}}$ —уровенной поверхности в азимуте A ,

$$\frac{1}{\rho_{\text{уп}}} = -\frac{W_{ll}}{g}, \quad (4.9)$$

производная W_{zz} — вертикальный градиент силы тяжести. Производная W_{lz} определяет кривизну силовой линии.

Сила тяжести $\bar{g}$ в точке P связана с силой тяжести $\bar{g}_0$ в начале координат равенством

$$\bar{g} = \bar{g}_0 + \frac{d\bar{g}}{dl} l + \frac{d\bar{g}}{dz} z,$$

где $\frac{d\bar{g}}{dl} = \frac{dg}{dl} \bar{l} = -W_{lz} \bar{l}$, $\frac{d\bar{g}}{dz} = \frac{dg}{dz} \bar{k} = -W_{zz} \bar{k}$;

W_{lz} — горизонтальный градиент силы тяжести, g — модуль вектора $\bar{g}$; $\bar{l}, \bar{k}$ — единичные векторы по направлениям l и z .

Для изменения величины (модуля) силы тяжести можно использовать выражение

$$g = g_0 - W_{lz} l - W_{zz} z. \quad (4.10)$$

Составляющая ϑ в азимуте A угла

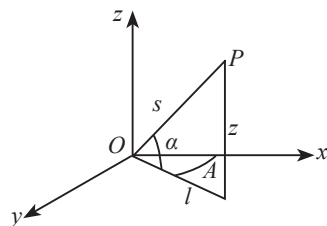


Рис. 4.4. Топоцентрические системы координат:

x, y, z — горизонтальная прямоугольная;
 l, z, A — цилиндрическая

между направлением вектора $\vec{g}$ силы тяжести и осью z равна отношению составляющей силы тяжести в направлении l к модулю g силы тяжести, $\vartheta = -g_l/g$, или, так как $g_l = W_l$,

$$\vartheta = -\frac{W_l}{g}, \quad W_l = -g\vartheta.$$

Составляющая ϑ в пункте P сети через составляющую ϑ_0 в исходном пункте определяет выражение, вытекающее из (4.8):

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{1}{g}(W_{ll}l + W_{lz}z + \dots). \quad (4.11)$$

Для последующих оценок будем использовать значения постоянных, приведенные в табл. 4.1.

Т а б л и ц а 4.1

Поле силы тяжести Земли

Постоянная	Обозначение, формула	Величина
Угловая скорость вращения, с^{-1}	ω	$7,292 \cdot 10^{-5}$
Средний радиус, м	R	$6,371 \cdot 10^6$
Сила тяжести на поверхности Земли, мс^{-2}	$g = -W_z$	9,8
Потенциал на поверхности Земли, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$	W	$6,264 \cdot 10^7$
Средний градиент кривизны уровенной поверхности, с^{-2}	$W_{ll} \approx -g/R$	$-1,538 \cdot 10^{-6}$
Вертикальный градиент силы тяжести, с^{-2}	$W_{zz} = -2W_{ll} + 2\omega^2$	$3,086 \cdot 10^{-6}$
Средние квадратические значения производных, с^{-2}	$W_{xy}, W_{lz}, W_{xz}, W_{yz}, W_{\Delta}$	$15 \cdot 10^{-8}$
Значения производных, осредненные на расстоянии 1 км, с^{-2}	$W_{xy}, W_{lz}, W_{xz}, W_{yz}, W_{\Delta}$	$5 \cdot 10^{-8}$

В табл. 4.1 приведены средние значения величин. В разных точках поверхности Земли действительные значения могут существенно отличаться от средних.

Поле силы тяжести реальной Земли можно представить нормальным гравитационным полем с разной степенью приближения. В табл. 4.2 приведены характеристики для трех моделей нормального поля, используемых в геодезии: однородного, центрального и эллипсоидального нормального поля. Напомним, что центральным гравитационным полем

называют поле притяжения материальной точки, однородного шара и однородной сферы. В этом случае потенциал U и сила γ являются функциями только расстояния ρ от центра масс,

$$U = \frac{GM}{\rho}, \quad \gamma = \frac{GM}{\rho^2}, \quad (4.12)$$

уровенные поверхности — концентрические сферы. На одной и той же уровенной поверхности при постоянном ρ сила тяжести постоянна по величине (по модулю), однако направление ее различно и сила γ направлена к центру масс. В центральном поле в отличие от однородного кривизна уровенных поверхностей не равна нулю, но силовые линии остаются прямыми.

Т а б л и ц а 4.2

Нормальное гравитационное поле

Обозначение, формула	Нормальное поле			
	однород- ное	цен- тральное	эллипсоидальное	
$\omega, \text{с}^{-1}$	—	—	$7,292 \cdot 10^{-5}$	
$R, \text{м}$		$6,371 \cdot 10^6$	$6,371 \cdot 10^6$	
$U_0, \text{м}^2 \text{с}^{-2}$	W_0	$6,24 \cdot 10^7$	$6,264 \cdot 10^7$	
$\gamma = -U_z, \text{мс}^{-2}$	9,8 постоянна	9,806	полос	экватор
			9,8322	9,7803
$U_{xx} \cdot 10^6, \text{с}^{-2}$	0	-1,538	-1,5364	-1,5437
$U_{yy} \cdot 10^6, \text{с}^{-2}$	0	-1,538	-1,5364	-1,5334
$U_{ll} = \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy}) \cdot 10^6, \text{с}^{-2}$	0	-1,538	-1,5364	-1,5386
$U_{zz} = (-2U_{ll} + 2\omega^2) \cdot 10^6, \text{с}^{-2}$	0	3,076	3,0834	3,0878
$U_{\Delta} = (U_{yy} - U_{xx}) \cdot 10^8, \text{с}^{-2}$	0	0	$1,026 \cos^2 B = 0,513(1 + \cos 2B)$	
U_{xy}	0	0	0	
$U_{xz} \cdot 10^8, \text{с}^{-2}$	0	0	$0,815 \sin 2B$	
U_{yz}	0	0	0	

Из приведенных в табл. 4.2 значений, видно, что вторые производные центрального и эллипсоидального нормального поля отличаются незначительно. Разности производных U_{xx} , U_{yy} , U_{zz} не превышают $1,4 \cdot 10^{-8}$, а их средние для эллипсоидального поля значения совпадают со значениями для центрального поля.

4.4. Однородное нормальное поле

В пределах небольшой территории, ограниченной районом инженерно-геодезической съемки, в качестве нормального можно использовать однородное поле. В этом случае допустимо центробежный потенциал считать постоянным и представить нормальный потенциал функцией (1.3) расстояния z от выбранной отсчетной плоскости

$$U_{\text{одн}} = U_0 - \gamma_0 z, \gamma_0 = \text{const.} \quad (4.13)$$

Вычитая выражение (4.13) из потенциала (4.8), найдем разность $T_{\text{одн}}$ действительного потенциала W и однородного нормального потенциала

$$T_{\text{одн}} = W - U_{\text{одн}} = W_0 - U_0 + W_l l + (W_z - \gamma_0) z + 0,5 W_{ll} l^2 + 0,5 W_{zz} z^2 + W_{lz} lz.$$

Посмотрим, при каких условиях потенциалом $T_{\text{одн}}$ можно пренебречь и считать измерения выполненными в однородном поле плоской Земли.

Рассмотрим рис. 4.5. Пусть отсчетная плоскость $z=0$ проходит через точку O сети перпендикулярно к направлению силы тяжести в этой

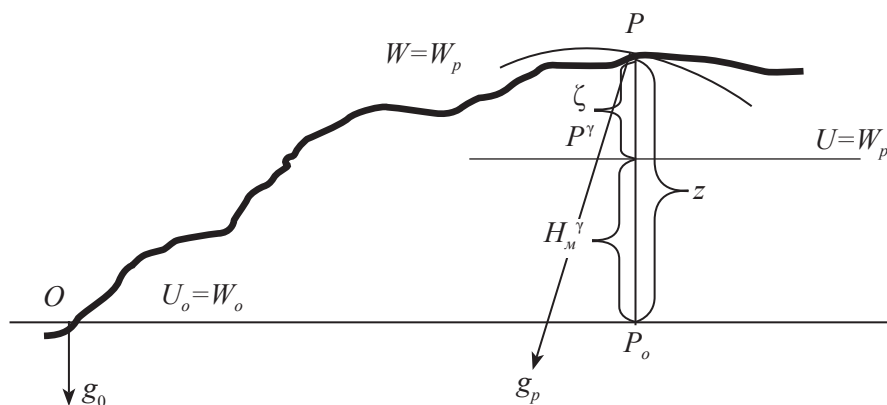


Рис. 4.5. Однородное нормальное поле

точке. Положим в точке O нормальный потенциал U_0 равным действительному потенциалу W_0 в этой же точке $U_0=W_0$, а отсчетную плоскость уровенной поверхностью $U=U_0=W_0$ однородного нормального поля. Нормальную силу тяжести γ_0 в точке O примем равной действительной силе тяжести $\gamma_0=g_0$.

Тогда в любой точке P сети нормальный потенциал U_p согласно (4.13) можно написать в виде

$$U_p=W_0-g_0z. \quad (4.14)$$

Посмотрим, какой смысл получают элементы аномального поля при таком выборе нормального потенциала. Напомним, что элементы локальной сети принято называть *местными*.

В начальном пункте сети составляющая силы тяжести в горизонтальном направлении, равная производной W_l , равна нулю, а производная W_z равна силе тяжести g_0 . Поэтому для аномального потенциала находим

$$T_{\text{одн}}=W-U_{\text{одн}}=0,5W_{ll}l^2+0,5W_{zz}z^2+W_{lz}lz. \quad (4.15)$$

Найдем другие элементы нормального поля. Нормальная сила тяжести постоянна во всех точках, поэтому аномалия силы тяжести будет равна разности силы тяжести в любой точке сети и силы тяжести в исходном пункте

$$g-\gamma=g-g_0.$$

Аномалию силы тяжести можно получить из формулы (4.10) или как производную аномального потенциала по направлению z :

$$g-\gamma=g-g_0=-\frac{\partial T}{\partial z}=-W_{zz}z-W_{lz}l. \quad (4.16)$$

Для аномалии высоты ζ находим согласно (4.15)

$$\zeta=\frac{T}{g_0}=\frac{1}{2g_0}W_{ll}l^2+\frac{1}{2g_0}W_{zz}z^2+\frac{1}{g_0}W_{lz}lz. \quad (4.17)$$

Составляющая уклонения отвеса в азимуте A линии l для потенциала (4.14) определена формулой (4.11). Если в начальном пункте O уклонение отвеса ϑ_0 принять равным нулю, то

$$\vartheta=-\frac{1}{g}(W_{ll}l+W_{lz}z). \quad (4.18)$$

Таким образом, относительно однородного нормального поля аномалия силы тяжести является разностью силы тяжести в любой точке

и ее значения в начале координат, а гравиметрическое уклонение от веса определяет отличие направления силы тяжести в произвольной точке сети от нормали к отсчетной плоскости, т.е. от направления силы тяжести в точке O . Причем обе эти величины определены вторыми производными потенциала силы тяжести.

В однородном нормальном поле чистая и смешанная аномалия силы тяжести совпадают, поскольку нормальная сила тяжести постоянна и в точке P поверхности Земли она равна нормальной силе тяжести в точке P' .

Рассмотрим аномалию высоты. Отметим на нормали P_0P точку P' , в которой нормальный потенциал (4.14) равен потенциалу силы тяжести в точке P :

$$U_{p'} = W_p.$$

В точке P нормальный потенциал равен разности потенциала W_p и аномального потенциала $T_{\text{одн}}$, $U_p = W_p$, поэтому

$$U_{p'} - U_p = T_{\text{одн}} = W_{ll}l^2 + W_{zz}z^2 + W_{lz}lz.$$

Высота точки P' над отсчетной плоскостью равна разности высоты z точки P и отрезка $P'P_0$, поэтому для нормального потенциала в точках P и P' можно также написать согласно (4.14)

$$U_p = W_0 - g_0z,$$

$$U_{p'} = W_0 - g_0(z - P'P),$$

поэтому $U_{p'} - U_p = g_0P'P$, и $P'P = \zeta$.

Расстояние P_0P' между точками P_0 и P' , в которых разность нормальных потенциалов равна разности действительных потенциалов в исходном пункте O и пункте P поверхности Земли

$$U_0 - U_{p'} = W_0 - W_p$$

получает смысл местной *нормальной высоты*

$$H^\gamma = \frac{W_0 - W_p}{g_0}.$$

Разность $W_0 - W_p$ действительных потенциалов можно найти, положив нивелирный ход от точки O до точки P и измерив вдоль него значения силы тяжести

$$W_0 - W_p = \int_0^P g dh.$$

В однородном поле нормальная сила тяжести γ во всех точках постоянна и равна g_0 , поэтому для местной нормальной высоты получаем

$$H^\gamma = \frac{1}{g_0} \int_0^P g dh. \quad (4.19)$$

Согласно этому результату, нормальная высота совпадает с разностью потенциалов с точностью до постоянного множителя $1/g_0$ и представляет собой разность потенциалов, переведенную в линейную меру. На урвненной поверхности разность $W_0 - W_p$ потенциалов постоянна, поэтому постоянна и местная нормальная высота. Следовательно, в однородном поле нормальная высота совпадает с *местной динамической высотой*.

Внесем в формуле (4.19) местной нормальной высоты постоянный множитель $1/g_0$ под знак интеграла и затем в числителе подинтегрального выражения прибавим и вычтем g_0 . В результате получим

$$H^\gamma = \int_{op} dh + \int_{op} \frac{g - g_0}{g_0} dh. \quad (4.20)$$

Дифференцируя выражение (4.20), получим для элементарной разности нормальных высот

$$dH^\gamma = dh + \frac{g - g_0}{g_0} dh. \quad (4.21)$$

Следовательно, для нахождения приращения местной нормальной высоты в сумму превышений dh нужно ввести поправку, зависящую от изменения $g - g_0$ силы тяжести вдоль нивелирной линии.

Заменим во втором интеграле (4.20) разность $g - g_0$ ее средним интегральным значением $(g - g_0)_m = g_m - g_0$ вдоль линии OP , а интеграл $\int_{op} dh$ — суммой превышений $\sum_{op} \Delta h$:

$$H^\gamma = \sum_{op} \Delta h + \frac{g_m - g_0}{g_0} \sum_{op} \Delta h.$$

Разность $(H^\gamma)_2 - (H^\gamma)_1$ местных нормальных высот между двумя произвольными точками 1 и 2 находится по аналогичной формуле

$$(H^\gamma)_2 - (H^\gamma)_1 = \sum_{1-2} \Delta h + \frac{g_m - g_0}{g_0} \sum_{1-2} \Delta h,$$

примем g_m равным $0,5(g + g_0)$, тогда $g_m - g_0 = 0,5(g - g_0)$ и, используя для разности силы тяжести выражение (4.16), находим

$$H^\gamma = \sum_{op} \Delta h - \frac{1}{g_0} \left(W_{lz} \frac{l}{2} + W_{zz} \frac{z}{2} \right) \sum_{o-p} \Delta h. \quad (4.22)$$

Отсюда для разности местной нормальной высоты (4.22) и суммы нивелирных превышений получим

$$(H^y)_p - \sum_{o-p} \Delta h = \frac{g_m - g_0}{g_0} \sum_{o-p} \Delta h = -\frac{1}{g_0} \left(W_{lz} \frac{l}{2} + W_{zz} \frac{z}{2} \right) \sum_{o-p} \Delta h. \quad (4.23)$$

Найдем местную геодезическую высоту z . Она равна сумме нормальной высоты и аномалии высоты (см. рис. 4.3) $z = H^y + \zeta$.

Сложим выражения (4.22) и (4.17):

$$z = \sum_{op} \Delta h - \frac{1}{g_0} \left(W_{lz} \frac{l}{2} + W_{zz} \frac{z}{2} \right) \sum_{op} \Delta h + \frac{1}{g_0} \left(\frac{1}{2} W_{ll} l^2 + \frac{1}{2} W_{zz} z^2 + W_{lz} lz \right).$$

Если положить $\sum_{o-p} \Delta h \approx z$, то для высоты z получим

$$z = \sum_{o-p} \Delta h + \frac{1}{2g_0} (W_{lz} z + W_{ll} l).$$

Но согласно (4.18) второй член правой части связан с отклонением отвеса, поэтому

$$z = \sum_{o-p} \Delta h - \frac{1}{2} \vartheta l = \sum_{o-p} \Delta h - \vartheta_m l, \quad (4.24)$$

где ϑ_m — среднее отклонение отвеса между точками O и P .

Формула (4.24) является формулой астрономического нивелирования поверхности Земли. Из нее следует, что для получения превышения z над отсчетной плоскостью в измеренное нивелирное превышение $\sum h$ нужно ввести поправку — $\vartheta_m dl$, учитывающую наклон уровенной поверхности.

Если сила тяжести g постоянна в районе работ и разность $g - g_0$ равна нулю, местная нормальная высота будет равна сумме измеренных превышений. Это результат следует из того, что при постоянной силе тяжести, т.е. в однородном поле, уровенные поверхности являются параллельными плоскостями и расстояние между ними не зависит от пути нивелирования. В однородном поле все высоты — геодезическая, нормальная, динамическая — совпадают и равны сумме измеренных превышений.

Для нахождения отклонения отвеса обратимся к рис. 2.3 и 2.4. Теперь в точке P на рис. 2.3 нормальную силу тяжести γ нужно направить на направление, параллельное силе тяжести g_0 , а координаты B^y и L астрономическими координатами φ_0, λ_0 точки O . В соответствии с этим вместо сферического треугольника $Z_p Z^s Z^y$ (см. рис. 2.4) получаем

треугольник $Z_p Z^s Z^O$ (рис. 4.6), вершиной Z^O которого является точка пересечения линии, параллельной силе тяжести точки O , с вспомогательной небесной сферой. Будем считать, что местное уклонение отвеса не превышает $1'$, т.е. расстояние между точками O и P менее 2 км. Тогда по аналогии с (2.11) и (2.12) для составляющих ξ_m , η_m местного гравиметрического уклонения отвеса имеем

$$\xi_m = \varphi - \varphi_0, \quad (4.25)$$

$$\eta_m = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi. \quad (4.26)$$

Таким образом, составляющие местного гравиметрического уклонения отвеса определены разностями астрономических координат любой точки P сети и начальной точки O .

Для составляющей ϑ уклонения отвеса в азимуте A линии OP получаем

$$\vartheta = (\varphi - \varphi_0) \cos A + (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \sin A. \quad (4.27)$$

Это уклонение отвеса связано со вторыми производными потенциала формулой (4.18).

4.5. Оценка неоднородности эллипсоидального и центрального нормального поля

Оценим величины элементов аномального поля по формулам (4.15)–(4.18), используя постоянные табл. 4.1–4.2. Наибольшее отличие от реального имеет однородное поле, для которого все вторые производные равны нулю. Поэтому разности производных W_{xx} , W_{yy} , W_{ll} , W_{zz} реального поля относительно однородного равны значениям этих производных, имеют порядок $(1,5-3)10^{-6} \text{ с}^{-2}$ и на 1–2 порядка превышают значения остальных производных второго порядка. В связи с этим основное влияние на $T_{\text{одн}}$ оказывает отличие центрального поля от однородного, т.е. кривизна Земли. Если окажется, что этим отличием можно пренебречь, то учет влияния остальных членов в потенциале (4.15) будет излишним. Оценим поэтому неоднородность центрального поля.

Реальный потенциал является суммой потенциала $U_{\text{эл}}$ уровненного эллипсоида и аномального потенциала T :

$$W = U_{\text{эл}} + T.$$

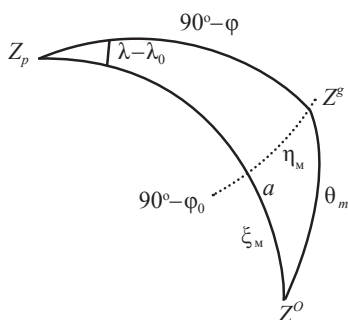


Рис. 4.6. Местное уклонение отвеса

Для разности действительного потенциала и потенциала в однородном поле, которая является аномальным потенциалом относительно однородного поля, можно написать

$$T_{\text{одн}} = W - U_{\text{одн}} = W - U_{\text{эл}} + U_{\text{эл}} - U_{\text{ц}} + U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}}$$

или

$$T_{\text{одн}} = (U_{\text{эл}} - U_{\text{ц}}) + (U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}}) + T, \quad (4.28)$$

где $U_{\text{ц}}$ — потенциал центрального поля.

Оценим последовательно члены этой формулы. Начнем с отличия эллипсоидального и центрального поля. Эллипсоидальное поле подробно рассмотрено в гл. 1. В эллипсоидальном поле в отличие от центрального силовая линия является кривой, а кривизна урвенной поверхности в одной и той же точки различна в разных направлениях. Сила тяжести на урвенной поверхности эллипсоидального поля не постоянна, поэтому урвенные поверхности не параллельны. Эти особенности эллипсоидального поля отражают производные U_{xz} и U_{Δ} . Причем кривизна силовой линии и непараллельность урвенных поверхностей связаны с горизонтальным градиентом U_{xz} силы тяжести, а изменение кривизны урвенной поверхности с производной U_{Δ} . Согласно (1.42)–(1.43)

$$U_{xz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\gamma}{\rho_{\text{сл}}} = \frac{\gamma \beta}{R} \sin 2B = 0,815 \cdot 10^{-8} \sin 2B,$$

где $\rho_{\text{сл}}$ — радиус кривизны силовой линии, а из (1.40)

$$U_{\Delta} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\gamma \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right) = \frac{\gamma e^2}{N} \cos^2 B = 1,026 \cdot 10^{-8} \cos^2 B.$$

Для вычисления коэффициентов этих формул использованы средние для Земли значения γ , R , N . Согласно табл. 4.2 производные U_{xz} и U_{Δ} значительно меньше остальных производных второго порядка.

Непараллельность урвенных поверхностей нормального поля оценена в 1.5. Согласно рис. 1.3 и формулам (1.42)–(1.45) изменение dh расстояния h между урвенными поверхностями определяет выражение

$$dh = \frac{h}{\rho_{\text{сл}}} dx = \frac{U_{xz}}{\gamma} \sin 2B h dx = 0,832 \cdot 10^{-9} \sin 2B h dx,$$

где dx — дуга меридиана.

На широте 45° если превышение $h=100$ м, а расстояние $dx=1$ км, $dh=0,08$ мм. Поэтому если район работ простирается вдоль меридиана

на расстояние даже в несколько километров, непараллельность нормальных уровенных поверхностей можно не учитывать. Однако этот эффект действует систематически, поэтому для протяженных линий нивелирования его нужно учитывать.

Рассмотрим влияние U_{Δ} . На широте 45° отличие радиусов кривизны меридиана и первого вертикала составляет 21,456 км. Поэтому, если угол между направлением силы тяжести в исходном и рядовом пункте сети равен $30''$ (расстояние около 1 км), то длина дуги меридиана будет короче длины дуги первого вертикала на $21,456 \times 30'' / \rho'' = 3,1$ м. В относительной мере это составит $3 \cdot 10^{-3}$ — величина порядка сжатия Земли. Однако на точность редуцирования измеренных на Земле линий изменение радиуса кривизны оказывает слабое влияние. Согласно (4.4) поправка ΔS в измеренную длину S равна $\vartheta dh = \frac{S}{R} dh$. Для ошибки этой поправки,

вызванной ошибкой радиуса кривизны R , получаем

$$d\Delta S = \frac{\Delta S}{R} dR = \frac{S dh}{R^2} dR.$$

При $S=10$ км, $dh=1$ км и $dR=21$ км получаем $d\Delta S=5$ мм. Поэтому при редуцировании к однородному полю можно использовать значение среднего радиуса кривизны и влияние U_{Δ} не учитывать.

Оценим неоднородность центрального поля. Для иллюстрации неоднородности центрального поля рассмотрим такой пример. Оценим неоднородность центрального поля в пределах лекционной аудитории. Пусть длина аудитории $S=24$ м, высота $h=4$ м (рис. 4.7).

Выберем начало координат в точке O на середине линии 3–4, а направление силы тяжести в точке O примем за ось прямоугольной системы координат. Положим, что стены 1–3 и 2–4 строго параллельны, так же как и потолок 3–4 и пол 1–2. Тогда аудитория зримо осуществляет прямоугольную систему координат: три ребра, выходящие из любого угла аудитории, параллельны осям этой системы.

Отвесные линии, проходящие через углы 3 и 4, не лежат в плоскости боковых стен и образуют с ними углы, равные уклонению отвеса ϑ в выбранной прямоугольной системе координат. Согласно рис. 4.7 эти углы равны углам при цен-

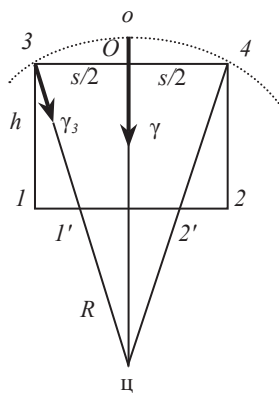


Рис. 4.7. Неоднородность центрального поля

тре ϑ , равным отношению дуг $o3$ и $o4$ к радиусу R Земли, т.е. $\vartheta = S/2R$. При выбранном значении $S=24$ м эти углы равны $0,39''$ или $2 \cdot 10^{-6}$.

Проекции углов 3 и 4 аудитории по отвесным линиям пересекают пол $l-2$ в точках l' и $2'$. Из треугольников $3-l-l'$ и $4-2'-2$ для этих отрезков получаем $l-l'=2'-2=\vartheta h=7,6$ мкм, т.е. длина пола короче длины потолка на 15 мкм или на $6 \cdot 10^{-7}$.

Уровенная поверхность $3o4$ не совпадает с плоскостью потолка. Отличие длины дуги $3o$ уровенной поверхности, равной ϑR , от соответствующей хорды $3O$, равной $R \sin \vartheta$, составит ничтожную величину

$R \frac{\vartheta^3}{6} = \frac{S^3}{48R^2} = 7 \cdot 10^{-6}$ мкм, а высота Oo уровенной поверхности $3o4$ над точкой O будет равна $R - R \cos \vartheta = R \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{S^2}{8R} = 11,3$ мкм.

Приведенные оценки свидетельствуют о близости угловых и линейных элементов в центральном поле к соответствующим элементам однородного поля в небольшом объеме. Однако даже в этом случае влияние неоднородности поля будет ощутимо, если измерения выполнены с точностью 10^{-6} и выше. Заметными являются отличие уровенной поверхности от плоскости, уклонения отвесной линии и длины линий, лежащих на разных уровенных поверхностях.

Оценим неоднородность центрального поля в общем случае. Выразим потенциал (4.12) центрального поля в переменных l и z (рис. 4.8)

$$\rho^2 = (R+z)^2 + l^2 \Rightarrow 1/\rho = 1/R(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{l^2}{2R^2} + \dots)$$

$$U_{\text{ц}} = U_0 - \gamma_0 z + \frac{\gamma}{R} z^2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{R} l^2 + \dots$$

Первые два члена правой части — это потенциал однородного поля, а отношение $\frac{\gamma}{R} = \frac{1}{2} U_{zz}$. Член $\frac{1}{2} \frac{\gamma}{R} l^2$ называют поправкой за кривизну Земли.

Так как в центральном поле $\frac{1}{2} U_{zz} = -U_{ll}$, для разности $U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}}$ получаем

$$U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}} = \frac{1}{2} U_{zz} z^2 + \frac{1}{2} U_{ll} l^2 = \frac{1}{2} U_{ll} l^2 \left(1 - 2 \frac{z^2}{l^2} \right). \quad (4.29)$$

Формулу (4.29) можно получить также из формулы (4.15), применив ее к центральному полю.

Найдем остальные элементы разностного поля $U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}}$ согласно формулам (4.14)–(4.16)

(4.30)

$$U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}} = -0,769 \cdot 10^{-6} l^2 \left(1 - 2 \frac{z^2}{l^2} \right),$$

$$\zeta_{\text{ш}} = -0,785 \cdot 10^{-7} l_m l \left(1 - 2 \frac{z^2}{l^2} \right),$$

$$\gamma - \gamma_0 = -3,086 \cdot 10^{-6},$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = 0,0324'' l_m.$$

Рис. 4.8. Центральное и однородное нормальное поле

Таблица 4.3

Оценка неоднородности центрального нормального поля

Обозначения	Радиус области l , м				
	10	30,8	100	1 000	10 000
$ U_{\text{ц}} - U_{\text{одн}} , \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	$0,769 \times 10^{-4}$	$0,730 \times 10^{-3}$	$0,769 \times 10^{-2}$	0,769	76,9
$\zeta_{\text{ц}}, \text{ мм}$	0,01	0,07	0,79	78,5	$7,85 \cdot 10^3$
$\vartheta - \vartheta_0$	0,32''	1''	3,24''	32,4''	5,4'

Согласно этим вычислениям если ошибки измерения превышений больше 0,1 мм, а ошибки измерения углов больше 1" неоднородность центрального поля можно не принимать во внимание для расстояний до 30 м.

Выполним оценку поправок в измеренные величины для перехода к однородному полю. В разд. 4.2 для этих поправок получены формулы

(4.4)–(4.7). Согласно (4.5) для перехода к разности Δz местных геодезических высот в измеренное превышение Δh нужно ввести поправку $\vartheta_m S_0$; $\vartheta_m S_0$, — среднее значение уклонения отвеса между исходным и определяемым пунктами. Но в исходном пункте уклонение отвеса считается равным нулю, поэтому $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_0)$ и для поправки $\vartheta_m S_0$, получаем, полагая $S_0 = l$,

$$\Delta z - \Delta h = -\vartheta_m l = -\frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_0)l.$$

Подставив в это выражение $(\vartheta - \vartheta_0)$ согласно (4.30), найдем

$$\Delta z - \Delta h = \frac{1}{2} \frac{U_{II}}{\gamma_0} l^2 = \zeta_{II}.$$

Следовательно, приведенные в табл. 4.3 в строке ζ_{II} аномалии высоты равны поправкам в нивелирное превышение для перехода к местной геодезической высоте. Поправки в измеренные зенитные расстояния или углы наклона согласно (4.6) равны разности уклонений отвеса в рядовом пункте сети относительно исходного. Эти поправки помещены в строке $(\vartheta - \vartheta_0)$ табл. 4.3.

Для вычисления поправок в расстояния служит формула (4.4), которую можно написать так:

$$l - s_0 = \vartheta \Delta h = \vartheta s \sin \alpha = \vartheta l \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \vartheta)} = -2\zeta_{II} \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \vartheta)}.$$

Результат вычисления по этой формуле для различных расстояний и углов наклона помещен в табл. 4.4.

Т а б л и ц а 4.4

Поправки в результаты линейных измерений (мм)

$l, \text{ м}$	ϑ	$2\zeta_{II}, \text{ мм}$	Угол наклона α				
			30''	1°	5°	10°	45°
10	0,32''	0,02	0	0	0	0	0,02
100	3,25''	1,58	0	0,03	0,14	0,28	1,58
1000	32,5''	157,6	0	2,75	13,80	27,78	157,6

Т а б л и ц а 4.5

Поправки в горизонтальные направления

$l, \text{ м}$	Угол наклона α				
	30''	1°	5°	10°	45°
10	0	0	0,03''	0,05''	0,3''
100	0	0,05''	0,26''	0,53''	3''
1000	0	0,52''	2,62''	5,29''	30''

Наконец, по формуле (4.7) можно найти поправки $\Delta A = \vartheta \operatorname{ctg} Z = \vartheta \operatorname{tg} \alpha$ в горизонтальные направления для перехода к однородному полю (табл. 4.5).

Согласно приведенным в табл. 4.3–4.5 оценкам, центральное поле можно считать однородным в радиусе до 100 м и при углах наклона до 45° , если ошибки измерения вертикальных и горизонтальных углов больше $5''$, ошибки превышений больше 1 мм и точность измерения расстояний менее 10^{-5} .

4.6. Неоднородность аномального поля

Поле силы тяжести реальной Земли значительно сложнее рассмотренного выше центрального поля. В реальном поле силовые линии являются пространственными кривыми и не совпадают с отвесными линиями, а кривизна уровенных поверхностей изменяется не только при изменении высоты, как в центральном поле, но и на одной и той же уровенной поверхности и даже в одной и той же точке уровенной поверхности она различна по разным направлениям. В формуле (4.28) неоднородность аномального поля оценивает аномальный потенциал T .

После исключения центрального поля и учета эллиптичности для аномального потенциала согласно (4.15) и (4.28) напомним

$$T = \frac{1}{2} T_{ll} l^2 + \frac{1}{2} T_{zz} z^2 + T_{lz} lz.$$

Положим все аномалии вторых производных одинаковыми и равными G :

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{xy} = T_{ll} = T_{xz} = T_{yz} = T_{lz} = T_{zz} = G, \quad (4.31)$$

тогда для оценки изменения силы тяжести по величине и направлению и изменения формы уровенной поверхности, вызванные аномальным полем, можно записать изменение:

величины силы тяжести на расстоянии S $g - g_0 = GS$;

направления силы тяжести с высотой $\vartheta - \vartheta_0 = \frac{G}{g} h$;

направления силы тяжести вдоль уровенной поверхности

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{G}{g} S;$$

высоты уровенной поверхности $\zeta - \zeta_0 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} S^2$.

В равнинных районах аномалии вторых производных могут до-

стигать сотен этвеш. В наши оценочные формулы входят средние значения кривизн уровенной поверхности и силовой линии, поэтому и для вторых производных следует использовать их средние значения. При осреднении на расстояниях в несколько десятков метров средние аномалии вторых производных можно принять равными 50–100 Э. Для средних на расстояниях около одного километра — 20 Э. Оценка влияния аномального поля на угловые и линейные величины при различных размерах площади, на которой выполнены геодезические измерения, приведена в табл. 4.6.

Данные табл. 4.6. позволяют сделать заключение о необходимости учета влияния неоднородности в конкретном случае. Предположим, что по геодезическим измерениям следует перенести в натуру точки некоторой линии длиной около 1 км со средней квадратической ошибкой каждой координаты около 1 мм. Из второй строки табл. 4.6 определяем, что разность высоты $\zeta - \zeta_0 = 1$ мм. Это предельная величина систематической ошибки в высоте, которая не выявляется нивелировками. Таким образом, в рассмотренном примере при разбивке кривой аномальность гравитационного поля нужно учитывать.

Т а б л и ц а 4.6

Влияние аномального поля

S , км	G , Э	$g - g_0$, мГл	$\frac{G}{g}s$	$\vartheta - \vartheta_0$	$\zeta - \zeta_0$, мм
0,1	50	0,5	$5 \cdot 10^{-7}$	0,1"	0,03
1	20	2	$2 \cdot 10^{-6}$	0,4'	1
10	7	7	$1 \cdot 10^{-5}$	1,5'	36

Заметим, что с увеличением расстояния s быстрее всего увеличивается разность высот $\zeta - \zeta_0$, она пропорциональна квадрату S .

Использованные в табл. 4.6 значения аномалии вторых производных относятся к равнинному району; в холмистых и горных районах их величины могут быть в несколько раз больше.

4.7. Оценивание вторых производных аномального потенциала по гравиметрической карте

Мы знаем, что первые производные аномального потенциала связаны с отклонениями отвеса и аномалией силы тяжести. Согласно (2.6)–(2.7)

$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x} = -\gamma\xi, \quad T_y = \frac{\partial T}{\partial y} = -\gamma\eta, \quad T_z = -(g - \gamma).$$

Вторые производные аномального потенциала можно получить дифференцированием этих выражений. Например, вторую производную по оси x можно приближенно найти численным дифференцированием, используя конечную разность $(T_x)_2 - (T_x)_1$ первых производных в двух близких точках, лежащих вдоль меридиана на расстоянии $x_2 - x_1$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{(T_x)_2 - (T_x)_1}{x_2 - x_1}.$$

Аналогичные выражения можно написать для остальных производных второго порядка, используя соответствующие разности первых производных. Если при этом учесть связь первых производных с составляющими уклонения отвеса и аномалией силы тяжести, то для приближенной оценки вторых производных аномального потенциала получаем выражения

$$\begin{aligned} T_{xx} &= -\gamma \frac{\xi_2 - \xi_1}{x_2 - x_1}, \quad T_{yy} = -\gamma \frac{\eta_2 - \eta_1}{y_2 - y_1}, \quad T_{xy} = -\gamma \frac{\xi_2 - \xi_1}{y_2 - y_1}, \quad T_{yx} = -\gamma \frac{\eta_2 - \eta_1}{x_2 - x_1}, \\ T_{zx} &= -\frac{(g - \gamma)_2 - (g - \gamma)_1}{x_2 - x_1}, \quad T_{zy} = -\frac{(g - \gamma)_2 - (g - \gamma)_1}{y_2 - y_1}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Согласно формулам (4.32) для нахождения вторых производных нужно иметь гравиметрическую карту, по которой можно непосредственно найти разности аномалий силы тяжести и вычислить производные T_{zx} и T_{zy} . Чтобы получить остальные производные, нужно сначала по формулам (3.53) вычислить составляющие уклонения отвеса в нескольких близких точках, расположенных вдоль меридиана (т.е. вдоль оси x) и вдоль параллели (т.е. вдоль оси y). Схема расположения точек для вычисления вторых производных дана на рис. 4.9.

Для приведенного примера по формулам (4.32) получаем в точке I :

по линии 4–2

$T_{xx} = 16 \text{ Э}$ для отрезка 2–1 и 55 Э для отрезка 1–4;

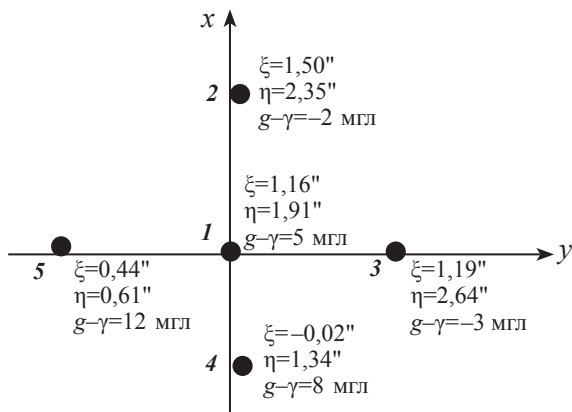


Рис. 4.9. К определению вторых производных (схема расположения вычислительных точек)

$T_{yx} = 21$ Э по линии 2–1 и 27 Э по линии 4–1.

Выполненные оценки являются приближенными из-за того, что численное дифференцирование является приближенным методом вычисления производных. Полученные значения градиентов являются средними значениями вдоль соответствующих отрезков. Поэтому для пункта 1 по разным отрезкам получены разные значения.

Поскольку значения аномалии вторых производных превышают 50 Э, в рассмотренном примере следует сделать заключение о необходимости учета неоднородности аномального поля при точности геодезических измерений 10^{-6} и выше.

Краевые задачи для сферы

Краевая задача теории потенциала состоит в определении функции, гармонической в некоторой области и удовлетворяющей заданным условиям на границе этой области своего существования. Напомним, что гармонической называют функцию, непрерывную в некоторой области вместе со своими производными первого и второго порядков и удовлетворяющую в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta T=0 \quad (\text{П1})$$

где Δ — оператор Лапласа, который в прямоугольных координатах x, y, z имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{П2})$$

В зависимости от формы краевой (или граничной) поверхности и вида краевого условия краевые задачи могут быть весьма разнообразны. Наиболее важными из них являются задачи, в которых на краевой поверхности заданы значения искомой гармонической функции, ее нормальной производной или их линейной комбинации. Если на краевой поверхности заданы значения гармонической функции, задача называется первой краевой задачей или задачей Дирихле. Если задана производная искомой функции по нормали к краевой поверхности, задача называется второй краевой задачей или задачей Неймана. Если задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной, задача называется третьей или смешанной.

Краевую задачу называют внутренней, если ищется гармоническая функция в замкнутой области. Если определяется гармоническая функция во внешнем относительно замкнутой краевой поверхности пространстве, краевую задачу называют внешней. Для однозначного решения внешней краевой задачи искомая гармоническая функция должна обращаться в нуль на бесконечности, т.е. быть регулярной на бесконечности.

Рассмотрим внешние краевые задачи для сферы. Пусть на поверхности σ сферы радиуса R задана функция $f(\vartheta, \lambda)$ сферических координат, ϑ — полярное расстояние, λ — долгота. Ищется гармоническая функция $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ во внешнем относительно σ пространстве, ρ — радиус-вектор (рис. П1).

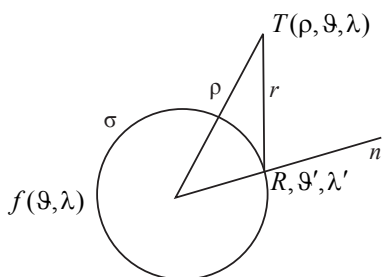


Рис. П1. Сферическая краевая поверхность

Напишем краевые условия:
первая краевая задача

$$T_{\sigma} = f_1(\vartheta, \lambda); \quad (\text{ПЗ, а})$$

вторая краевая задача

$$\left. \frac{dT}{dn} \right|_{\sigma} = f_2(\vartheta, \lambda); \quad (\text{ПЗ, б})$$

третья краевая задача

$$\left(\frac{dT}{dn} + \alpha T \right)_{\sigma} = f_3(\vartheta, \lambda). \quad (\text{ПЗ, в})$$

В этих формулах нижний индекс σ означает принадлежность соответствующей величины к поверхности сферы σ ; n — нормаль к поверхности сферы, α — произвольный коэффициент.

Разложим функцию $f(\vartheta, \lambda)$, заданную на поверхности сферы, в ряд сферических функций $Y_n(\vartheta, \lambda)$:

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_0^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (\text{П4})$$

Решение построим в виде ряда шаровых функций

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{X_n(\vartheta, \lambda)}{\rho^{n+1}}. \quad (\text{П5})$$

Шаровые функции $\frac{X_n(\vartheta, \lambda)}{\rho^{n+1}}$ являются гармоническими по определению, поэтому условие (П1) выполняется. Из (П.5) следует

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} T(\rho, \vartheta, \lambda) = 0,$$

т.е. функция $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ регулярна на бесконечности и поэтому (П5) дает решение внешней краевой задачи для сферы в общем виде. Чтобы получить конкретное решение, нужно найти неизвестные сферические функции $X_n(\vartheta, \lambda)$. Для этого служит краевое условие.

Решим *первую краевую задачу*. Подставим в краевое условие (ПЗ, а) ряды (П4)–(П5)

$$\sum_0^{\infty} \frac{X_n(\vartheta, \lambda)}{\rho^{n+1}} \Big|_{\sigma} = \sum_0^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda).$$

Ряды (П4), (П5) не содержат подобных членов, поэтому они равны почленно. Приравняв общий член левой и правой части последнего

равенства и учитывая, что в левой части на поверхности сферы $\rho=R$, получаем для сферической функции $X_n(\vartheta, \lambda)$ первой краевой задачи

$$X_n(\vartheta, \lambda) = R^{n+1} Y_n(\vartheta, \lambda).$$

Подставляя найденные функции $X_n(\vartheta, \lambda)$ в общее решение (П5), находим

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (\text{П6})$$

Это и есть решение первой краевой задачи.

Точно так же найдем решение *второй краевой задачи*. Так как для сферы направление нормали к поверхности совпадает с направлением ее радиуса, то

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial \rho},$$

а краевое условие (П3, б) примет вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = f_2(\vartheta, \lambda). \quad (\text{П7})$$

Дифференцируя (П5), находим

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = - \sum_0^{\infty} (n+1) \frac{X_n(\vartheta, \lambda)}{\rho^{n+2}}.$$

Подставляя этот ряд и ряд (П4) в краевое условие (П7) находим

$$- \sum_0^{\infty} (n+1) \frac{X_n(\vartheta, \lambda)}{R^{n+2}} = \sum_0^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda),$$

откуда

$$X_n(\vartheta, \lambda) = - \frac{R^{n+2}}{n+1} Y_n(\vartheta, \lambda)$$

и для решения второй краевой задачи для сферы получаем

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = - \sum_0^{\infty} \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n+1} \quad (\text{П8})$$

Осталось найти решение *третьей краевой задачи*. В гл. 3 для краевого условия получено выражение (3.23). Сравнивая его с краевым условием (П3, б) заключаем, что для геодезии важна третья краевая задача при $\alpha=2$ и поэтому напомним

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} \right|_{\rho=R} = f_3(\vartheta, \lambda). \quad (\text{П9})$$

Используем опять разложения (П4), (П5), тогда

$$-\sum_0^\infty (n-1) \frac{X_n(\vartheta, \lambda)}{R^{n+2}} = \sum_0^\infty Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (\text{П10})$$

Подставляем найденные из этого равенства функции $X_n(\vartheta, \lambda)$ в (3.5) и находим

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = -\sum_0^\infty \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n-1}, \quad n \neq 1. \quad (\text{П11})$$

Краевое условие (П10) и решение (П11) имеют особенность: при $n=1$ разность $n-1=0$, поэтому (П10) и (П11) не может содержать сферической функции $X_1(\vartheta, \lambda)$. Отсутствие сферической функции первой степени в разложении (П4) является условием существования решения третьей краевой задачи с краевым условием ((П9). Сферическую функцию $X_1(\vartheta, \lambda)$ из решения задачи с краевым условием (П9) определить нельзя.

Выделим в решении (П11) сферическую функцию нулевой степени $Y_0(\vartheta, \lambda)$ и добавим функцию $X_1(\vartheta, \lambda)$

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{R^2}{\rho} Y_0 - \sum_2^\infty \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n-1} + \frac{X_1(\vartheta, \lambda)}{\rho^2}. \quad (\text{П12})$$

Функция $X_1(\vartheta, \lambda)$ осталась неизвестной; у функции $Y_0(\vartheta, \lambda)$ аргументы опущены, поскольку сферическая функция нулевой степени постоянна.

Ряды (П6), (П8), (П11) можно просуммировать и получить решения сферических краевых задач в замкнутом виде. Для сферической функции известно выражение

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int_\sigma f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\sigma \quad (\text{П13})$$

где $P_n(\cos \psi)$ — полином Лежандра; ψ — угловое расстояние между фиксированной точкой с координатами ϑ, λ , в которой определяют функцию $Y_n(\vartheta, \lambda)$, и текущей точкой поверхности сферы σ с координатами ϑ', λ' , в которой должна быть известна функция $f(\vartheta', \lambda')$.

Подставим выражение (П13) в решение (П6) задачи Дирихле. Функция $f(\vartheta', \lambda')$ не зависит от степени n , поэтому ее можно вынести из под знака суммы и написать решение в виде

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \sum_0^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) d\sigma.$$

Возьмем производящую функцию $\frac{1}{r}$ полиномов Лежандра

$$\frac{1}{r} = \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) \quad (\text{П14})$$

r — расстояние между точками с координатами $(\rho, \vartheta, \lambda)$ и $(R, \vartheta', \lambda')$ (см. рис. П1). Дифференцируем (П14) по R

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = \sum_0^{\infty} n \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi)$$

и находим сумму $\frac{1}{r} + 2R \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi)$

Для расстояния r можно написать $r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \psi$,

поэтому
$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial R} = -\frac{R - \rho \cos \psi}{r^3}$$

и
$$\frac{1}{r} + 2R \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = \frac{\rho^2 - R^2}{r^3}.$$

Используя этот результат, находим интеграл Пуассона

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} f(\vartheta', \lambda') d\sigma, \quad (\text{П15})$$

решающий внешнюю задачу Дирихле для сферы.

Введем функцию (П13) в решение (П8) второй краевой задачи. Меняя местами суммирование и интегрирование, напишем

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi) d\sigma.$$

Введем обозначение $\sum_0^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi) = U(\rho, \psi).$

С этим обозначением для формулы, решающей внешнюю задачу Неймана для сферы, получаем

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') U(\rho, \psi) d\sigma.$$

На поверхности сферы при $\rho=R$

$$U(R, \psi) = \frac{1}{R} \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{R} U(\psi), \quad (\text{П17})$$

$$T(R, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') U(\psi) d\sigma. \quad (\text{П18})$$

Наконец получаем замкнутое решение третьей краевой задачи. Подставляем (П13) в (П12):

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) d\sigma$$

Вводим обозначение

$$S(\rho, \psi) = \sum_2^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (\text{П19})$$

Функцию $S(\rho, \psi)$ называют обобщенной функцией Стокса. Решение третьей краевой задачи для сферы с краевым условием (9) получает вид

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') [S(\rho, \psi) - 1] d\sigma + \frac{X_1(\vartheta, \lambda)}{\rho^2}. \quad (\text{П20})$$

Это — обобщенная формула Стокса.

Получим функцию $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ на поверхности сферы σ при $\rho=R$. В этом случае (П19) примет вид

$$S(R, \psi) = \frac{1}{R} \sum_2^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{R} S(\psi),$$

$$S(\psi) = \sum_2^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (\text{П20})$$

Функцию $S(\psi)$ называют функцией Стокса. Положим в (П19) $\rho=R$, тогда

$$T(R, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') [S(\psi) - 1] d\sigma + \frac{X_1(\vartheta, \lambda)}{R^2} \quad (\text{П21})$$

или, если не учитывать сферическую функцию первой степени,

$$T(R, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') [S(\psi) - 1] d\sigma. \quad (\text{П22})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Основные термины и определения

Аномалия высоты — расстояние между нормальной уровенной поверхностью, проходящей через данную точку, и нормальной уровенной поверхностью, на которой нормальный потенциал отличается от действительного потенциала в этой точке на постоянную величину $W_0 - U_0$

Аномалия высоты гравиметрическая (чистая) — расстояние между нормальной уровенной поверхностью, проходящей через данную точку, и той нормальной уровенной поверхностью, на которой нормальный потенциал равен действительному потенциалу в этой точке. Ее можно также определить как аномальный потенциал, выраженный в линейной мере

Аномалия силы тяжести — разность действительной и нормальной силы тяжести

Аномальное поле — остаточное поле, получающееся после выделения из действительного поля силы тяжести нормального поля

Аномальный потенциал — разность действительного и нормального потенциала

Астрономическая долгота — угол между плоскостями астрономического меридиана данной точки и начального меридиана

Астрономическая широта — угол между отвесной линией и плоскостью экватора

Высота в нормальном поле — отрезок нормальной силовой линии от эллипсоида до данной точки

Высота геодезическая — отрезок нормали к эллипсоиду от его поверхности до данной точки

Высота геодезическая местная — высота над отсчетной плоскостью

Высота динамическая — геопотенциальное число, выраженное в линейной мере

Высота динамическая местная — разность потенциалов, переведенная в линейную меру

Высота нормальная — высота в нормальном поле точки, в которой нормальное геопотенциальное число равно действительному

Высота нормальная местная — высота над отсчетной плоскостью точки, в которой нормальный потенциал равен действительному

Высота нормальная чистая — высота над эллипсоидом точки, в которой нормальный потенциал равен действительному

Высота ортометрическая — высота точки над геоидом

Геодезическая долгота — угол между плоскостями геодезического меридиана данной точки и начального меридиана

Геодезическая широта — угол между нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора

Геоид — уровенная поверхность, проходящая через начало счета высот

Геопотенциальное число — разность действительных потенциалов между геоидом и данной точкой

Геопотенциальное число нормальное — разность нормальных потенциалом между эллипсоидом и данной точкой

Геоцентрическая широта — угол между радиус-вектором и плоскостью экватора

Гипсометрическая поверхность — поверхность, получаемая в результате откладывания от эллипсоида нормальных высот

Краевая задача теории потенциала — задача определения функции, гармонической в некоторой области, удовлетворяющей заданным условиям на границе области существования (на краевой поверхности)

Краевое условие — уравнение, связывающее искомую гармоническую функцию с результатами измерений на краевой поверхности

Нормальная Земля — модель Земли, обладающая заданными свойствами

Нормальное поле — поле силы тяжести или силы тяготения, создаваемые нормальной Землей

Нормальный потенциал — потенциал простого вида, близкий к действительному

Нормальный эллипсоид — эллипсоид, поверхность которого является поверхностью нормальной Земли

Однородное поле — поле постоянной по величине и направлению силы

Отвесная линия — касательная к силовой линии

Превышение нивелирное — расстояние между уровнями поверхностями потенциала силы тяжести, проходящими через переходные точки геометрического нивелирования

Сила тяжести — равнодействующая силы притяжения и центробежной силы

Силовая линия — линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением силы

Уклонение отвесной линии астрономо-геодезическое — угол между отвесной линией и нормалью к эллипсоиду

Уклонение отвеса гравиметрическое — угол между направлениями действительной и нормальной силы тяжести

Уровенная или эквипотенциальная поверхность — поверхность, в каждой точке которой сила направлена по нормали к ней

Уровенный эллипсоид — эллипсоид, поверхность которого совпадает с уровенной поверхностью создаваемого им поля

Литература

1. **Аронов В.И.** Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. –М.: Недра, 1976.
2. **Бровар В.В.** Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии. –М.: Недра, 1983. –112 с.
3. **Огородова Л.В., Шимбирев Б.П., Юзефович А.П.** Гравиметрия. –М.: Недра, 1978. –328 с.
4. **Огородова Л.В.** Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия. –М.: Картгеоцентр-геодезиздат, 2006.
5. **Торге В.** Гравиметрия. –М.: Мир, 1999. –430 с.
6. **Юзефович А.П., Огородова Л.В.** Гравиметрия. –М.: Недра, 1980. –320 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
Г Л А В А 1	
НОРМАЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ	19
1.1 Понятие о нормальном поле и способах его выбора.....	19
1.2. Внешний потенциал притяжения уровенного эллипсоида	22
1.3. Внешний потенциал силы тяжести уровенного эллипсоида	27
1.4. Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида.....	28
1.5. Нормальная сила тяжести во внешней точке. Силловые линии и уровенные поверхности вблизи Земли.....	30
1.6. Система координат в нормальном поле	36
Г Л А В А 2	
АНОМАЛЬНОЕ ПОЛЕ. АНОМАЛИЯ ВЫСОТЫ, УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСА И АНОМАЛИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ.....	40
2.1. Аномальный потенциал и аномалия высоты.....	40
2.2. Уклонение отвеса и чистая аномалия силы тяжести	42
2.3. Связь системы координат в нормальном поле с натуральной системой.....	44
Г Л А В А 3	
ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА	48
3.1. Нормальная высота и поверхность Земли первого приближения.....	49
3.2. Связь аномалии высоты с аномальным потенциалом	52
3.3. Связь геодезических координат с аномальным потенциалом	54
3.4. Связь аномалии силы тяжести с аномальным потенциалом (краевое условие для аномального потенциала)	55
3.5. Краевое условие в нулевом приближении	57
3.6. Понятие об определении аномального потенциала в нулевом приближении	58
3.7. Задача Стокса и задача Молоденского	60
3.8. Определение аномального потенциала с использованием чистых аномалий силы тяжести (решение задачи Молоденского во втором приближении).....	63
3.9. Сравнение решений задачи Молоденского, полученных по смешанным и чистым аномалиям силы тяжести	65
3.10. Определение аномального потенциала для плоской отсчетной поверхности	67
3.11. Определение аномалии высоты и составляющих уклонения отвеса для плоской отсчетной поверхности	70

Г Л А В А 4

УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОДЕЗИИ..... 72

4.1. Геодезические измерения в однородном и неоднородном поле 72

4.2. Редуцирование результатов измерений..... 74

4.3. Представление гравитационного поля в ограниченной области 77

4.4. Однородное нормальное поле 80

4.5. Оценка неоднородности эллипсоидального
и центрального нормального поля 85

4.6. Неоднородность аномального поля..... 91

4.7. Оценивание вторых производных аномального потенциала
по гравиметрической карте..... 92

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

Краевые задачи для сферы 95

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

Основные термины и определения..... 101

Литература 103

Учебное пособие

Л.В. Огородова

**НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ
АНОМАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА**

Редактор *Е.А. Евтеева*

Компьютерная верстка *Б.В. Кузнецов*

Графика *А.Ю. Боков*

Дизайн обложки *Е.Б. Кузнецова*

Подписано в печать 25.08.2011. Гарнитура Таймс

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать RISO

Объем 6,5 усл. печ. л.

Второй тираж 200 экз. Заказ №178. Цена договорная.

ISBN 978-5-91188-025-5



9 78 5 9 1 1 8 8 0 2 5 5

Издательство МИИГАиК

105064, Москва, Гороховский пер., 4

Отпечатано в типографии МИИГАиК